第 28 卷第 3 期
2008 年 9 月

数学理论与应用
MATHEMATICAL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.28 No.3
Sep.2008

错用罗素悖论—康托在集合论中的两个逻辑性错误 ※

欧阳耿
(漳州师范学院数学系,漳州,363000)

摘　要　分析了罗素悖论与康托的实数集合不可数证明及康托定理 $\overline{\overline{S}} < \overline{\overline{P(S)}}$ 证明之间的本质性联系,发现康托的这两个非构造性证明与罗素悖论有完全相同的思路,但是康托犯了两个逻辑性错误而使他误用了这个悖论思路。得到明确的结论:康托在集合论中如上两个证明里的核心部分实际上是罗素悖论的翻版,这两个证明中的思路与做法是错误的,这样的证明结果没有科学性。

关键词　康托定理 $\overline{\overline{S}} < \overline{\overline{P(S)}}$　实数集合不可数性　罗素悖论　无穷理论体系　部分　全体　认识论　逻辑

Misusing Russell's Paradox —Cantor's Two Logical Errors in Set Theory

Ou Yanggeng
(Department of Mathematics, Zhangzhou Teachers' College, Zhangzhou, 363000)

Abstract　Through a new analysis on the essential relationship betwen Russell's Paradox and Cantor's proof on the uncountability of real number set and the proof on the Cantor's Theorem of $\overline{\overline{S}} < \overline{\overline{P(S)}}$, two mysterious errors were found: The very same idea was applied in both Russell and Cantor's work, but Cantor made wrong use of it with two logical mistakes. A conclusion is drown: The core of Cantor's above two important proofs in set theory are acturally another version of Russell's paradox, the ideas and operations in the two Cantor's proof are wrong and the results are not scientific at all.

Keywords　Cator's Theorem of $\overline{\overline{S}} < \overline{\overline{P(S)}}$　The uncountability of real number set　Russell's Paradox　Infinite theory system　Part　All　Epistemology　Logic

1　引　言

文献[1～4]讨论了存在于无穷集合论中的一些缺陷,指出了康托在集合论基础理论、无穷观中的错误。研究表明,正是完全相同的这些缺陷引起罗素构造出了著名的“罗素悖论”。实际上,康托比罗素早 10 年就已经构造出了罗素悖论。康托在实数集合不可数及康托定理 $\overline{\overline{S}} <$

※ 蔡海涛　教授推荐
收稿日期:2008 年 2 月 20 日

$\overline{P(S)}$证明中的主要内容与罗素悖论在本质上完全相同：二者都是利用对角线原理进行操作。但由于目的不同，表现形式不同，康托的这两个证明的推导结果被当作定理而得到赞美、保护、发扬光大，成为无穷集合论的重要'基础理论'；而罗素悖论的推导结果当时却产生了令人恐惧、悲哀的悖论，引发了第三次数学危机。本文分析了康托在这两个证明中所犯的两个很隐蔽的逻辑错误。

2 对角线方法与康托的重要证明

2.1 关于实数集合不可数的证明

1874 年及 1890 年，康托在两篇文章中分别证明了自然数集 N 和实数集 R 之间不可能建立一一对应，即实数集不可数。这两个证明都采用反证法。

第一个证明假定实数集 R 可数，全部实数必定可排成一个序列：

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_v。 \tag{1}$$

第二个证明假设实数集合(0,1)是可数的，我们把 0 与 1 之间的每个实数写成无穷小数 $0.P_1P_2P_3\cdots$，将实数集合(0,1)中的全部实数枚举起来，得到序列：

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, \cdots。 \tag{2}$$

于是在自然数集合与实数集合(0,1)之间构成了一一对应。

康托这两个证明在思路上与操作上是完全相同的，但是都存在着很隐蔽的逻辑错误(文献(1～4)中已有详细讨论)。一般说来，这类证明必有如下三个步骤：

第一步，假定'所要证明的实数集合可数，则实数集合中的全部元素必定可排成一个序列'，这样就构造出序列(1)或(2)，用它来表示实数集合的全部元素并给出这些元素。

康托证明中所构造的序列(1)或(2)实际上都仅仅是某种近视的实数序列，它们本来就是实数集合的子集，所构造的这种序列(1)或(2)实际上是在第二步中就可证明的不含有实数集合中某些元素的序列——如那些可用区间套方法或对角线方法找出的实数。

第二步，用区间套方法或对角线方法找出序列(1)或(2)所无法包容的元素，即找出那些事先用某些方法被藏起来的、本来就不可能出现在所构造的序列(1)或(2)中、但又确实属于实数集合的元素。

第三步，宣称'发现'序列(1)或(2)并不包含实数集合中的全部元素，这与第一步的假设不符，这样得出结论说第一步的假设是错误的，从而'反证'出最后的结论：实数集合不可数。

康托在这个证明中存在两种错误：

1)逻辑上的错误：先'藏起'可用对角线法或区间套法构造出的实数，随意给出个仅含所要证明的实数集合中部分实数的序列(1)或(2)，并假设它含有实数集合中的全部元素。然后用对角线法或区间套法'弄出'原先所藏的那些元素，说是'发现'序列(1)或(2)不含所要证明的实数集合中的全部实数。通过这样一种'先藏起来，然后弄出来给观众看'的作法得出实数集合不可数的结论。在康托的这个证明中，对角线法的成功仅证明一件事实：序列(1)或(2)仅代

表所要证明的集合的一个子集,它们本来就仅含有那集合中的部分元素。康托的这个证明中所犯的逻辑错误使这个证明成了一个典型的数学魔术。

2)无穷概念的混乱:由于经典无穷观的错误,康托自己在一一对应的原则上非常的混乱[4]。在实数不可数证明中他所使用的是‘比较两个无穷集合中元素的多少与‘元素的长相’密切相关’思想,并且用对角线法和区间套法寻找长相不同的元素来实践自己的这种思想。

但是在证明平面上的点和直线上的点一一对应时他所使用的却又是‘比较两个无穷集合中元素的多少与‘元素的长相’毫无相关’思想。

还应该指出的是,连续统理论使不少人认为实数集合可以代表线段上的点集,任何一个点都可以用实数来表示。如果人们真的可以用实数来完成数学上的对‘点”,对‘瞬间’的量的描述,那么芝诺悖论早在人们发现实数时就可以轻而易举地被解决了,并且也不会出现什么“第二次数学危机”!可是别忘了,任何实数,不管多小,都是有穷的数量形式,而第二次数学危机的经验告诉我们,任何有穷的数量形式,不管多小,都无法完成对‘点’及‘瞬间’的数量上的描述。此外,线段上的‘点’这个数学实体自从它进入数学以来,就被定义为一种与有穷数无关的“无度性’的几何量。当然,对任何一个有穷的数量形式,为了方便,人们可以用一个数学实体来表示它。在应用数学中,人们用‘点’来表示某个数,但这并不意味着‘点’的‘无度性’变成了“有度性”,也不意味着实数的‘有度性’变成了‘无度性”。线段上的‘无度性’的点并不等价于某一有穷的实数或有理数(人们曾认为线段上的点与有理数一一对应)。实数的有穷性与线段上的点的‘无度性”决定了实数集合与线段上的点集是两个具有本质性区别的集合,之间的元素具有本质性区别,两个集合之间仅具备一种为了方便的、勉强的、形式上的单射关系而不是具备满射关系(正如康托在如上证明中所表达的‘我们把 0 与 1 之间的每个实数写成无穷小数 $0.P_1P_2P_3\cdots$’说法仅仅是表示了一种为了方便的但不精确的数学操作而已,而康托却把这当作一种严格的数学等价而创造出那种用部分实数来代表全体实数的序列。)。那种‘线段上的任何点可以用实数来表示’的说法没有任何理论依据,并且与实数的‘有穷性’及点的‘无度性”性质相悖,不管现有数学中有多少巧妙的‘证明’试图劝人们相信‘实数与线段上的点一一对应”,那些‘证明’肯定都是错误的。任何两个实数都是有穷数,它们之间充满空隙,这些空隙中至少含有象微积分中的‘dx’这样一类人们公认存在于数学中的非有穷实数又非零的数量形式,更何况还含有连数性都不具备的其它的‘无度性’的几何点。所以,从“有穷性’这个数的性质来考虑,实数根本不可能具备连续的条件,任何两个实数之间都充满空隙,实数是不连续的!从理论上讲,实数的不连续性并没有比有理数的不连续性情况好多少。从有穷数性的角度来说,实数的不连续性完全等价于有理数的不连续性!

2.2 关于康托定理 $\overline{\overline{S}}<\overline{\overline{P(S)}}$ 的证明

现将康托 1891 年的这个证明摘引如下:

证明 首先证明 $\overline{\overline{S}}\leqslant\overline{\overline{P(S)}}$。因为对于任一 $x\in S$,令 $f(x)=\{x\}$,且当 $x_1\neq x_2$ 时,$\{x_1\}\neq\{x_2\}$,即 $f(x_1)\neq f(x_2)$。故 $f:S\to P(S)$是单射函数,因此有

$$\overline{\overline{S}}\leqslant\overline{\overline{P(S)}} \tag{3}$$

其次证明

$$\overline{\overline{S}} \neq \overline{\overline{P(S)}} \tag{4}$$

假若等号成立,则存在着一一对应 $\varphi: S \to P(S)$。由于对于任一 $x \in S$,即 $\varphi(x)$是 S 的子集合,$\varphi(x) \subseteq S$。现在要问:这个 x 是否属于$\varphi(x)$?当然,一般来说,可能是 $x \in \varphi(x)$,也可能是 $x \notin \varphi(x)$。现在构造一个集合 S_0,它是由 $x \notin \varphi(x)$的那些元素 x 组成的,即

$$S_0 = \{x \mid x \in S, x \notin \varphi(x)\} \tag{5}$$

显然,$S_0 \subseteq S$,即 $S_0 \in P(S)$。于是,根据 φ 是一一对应,必然存在一个 $x_0 \in S$,使得 $\varphi(x_0) = S_0$。根据逻辑排中律,或者 $x_0 \in S_0$,某种 $x_0 \notin S_0$,二者必有一个且仅有一个成立。

假若 $x_0 \in S_0$ 成立,根据(5)式中对 S_0 中元素的要求,应有 $x_0 \notin \varphi(x_0)$,而 $S_0 = \varphi(x_0)$。从而得到 $x_0 \notin S_0$。

假若 $x_0 \notin S_0$,由 $S_0 = \varphi(x_0)$得 $x_0 \notin \varphi(x_0)$。这样一来,根据 S_0 的定义(5),应有 $x_0 \in S_0$。

于是,不论 x_0 是否属于 S_0,都导致矛盾。此矛盾说明在 S 与 $P(S)$之间存在一一对应是错误的,所以不等式(4)成立。

由(4)与(3)成立即得到欲证明的结论:

$$\overline{\overline{S}} < \overline{\overline{P(S)}} \tag{6}$$

在这个证明中,康托犯了一个很明显的逻辑错误:他随意地引进了一个往往是在数学中不可构造的、不存在的、由(5)式所定义的、具有特殊功能的自我矛盾集合“S_0”而制造出一个“S_0事件”(这个 S_0 事件其实就是罗素所构造的那种引起第三次数学危机的罗素悖论)。这样的证明思路与作法不仅仅是不严谨的而且是错误的。举一个很简单的例子:以自然数集合 N 为例,如果我们想证明 $\overline{\overline{N}} < \overline{\overline{P(N)}}$而要证明 $\overline{\overline{N}} \neq \overline{\overline{P(N)}}$,谁也没办法符合逻辑地在数学中构造出像(3)式所定义的那个具有特殊功能的自我矛盾集合 $N_0 = \{x \mid x \in N, x \notin \varphi(x)\}$。康托不知道自己的整个证明是建立在一个往往是不可能存在于数学中的自我矛盾集合“S_0”之上,然后说是发现了“S_0 事件”中含有逻辑矛盾,再利用这个悖论中的逻辑矛盾来进行反证推理,当然可以轻而易举地、非常漂亮地得到自己所需的任何结论——这不是人类科学中的数学。

3 对角线方法与罗素悖论

当谈到第三次数学危机时,人们通常会提到布拉里—弗尔蒂悖论、康托悖论及罗素悖论。特别值得一提的是罗素是在研究前两个悖论时发现它的罗素悖论的。人们普遍认为罗素悖论是对前两个悖论的一种深化,它略去了所有数学上的技术细节,包含了引发第三次数学危机的集合论悖论的精髓,所以人们通常认为是罗素悖论才真正导致第三次数学危机。现将罗素悖论摘引如下:

设 T 为所有不是自己元素的集合所组成的一个整体,即 $T := \{x \mid x \notin x\}$,试问:$T$ 属于 T 吗?

假设 $T \in T$,T 是它自身的元素,即 T 为 T 的元素。又因为 T 的元素具有性质:自己不属

于自己，亦即 $T\notin T$。因此这与假设 $T\in T$ 矛盾。

假设 $T\notin T$，即 T 不是自身的元素。由 T 的定义，T 是所有不是自身的元素的集合组成的，既然 $T\notin T$，T 就是 T 的元素，故 $T\in T$。这又与假设 $T\notin T$ 矛盾。

根据上述论证，不管是 $T\in T$，还是 $T\notin T$，都导致矛盾。同时，依据逻辑排中律，总有 $T\in T$ 或 $T\notin T$ 之一成立。这样，就得到一个悖论，称它为罗素悖论。

人们公认，罗素悖论开门见山，直接用对角线方法构造了一个含有逻辑矛盾的自我矛盾集合 T，省去了所有数学上的技术细节，充分地展示康托在实数集合不可数证明及康定理 $\overline{\overline{S}}<\overline{\overline{P(S)}}$ 证明中起关键性作用的‘秘密武器’——悖论中的逻辑矛盾，使之成为成功应用对角线方法来暴露现存理论体系缺陷的一件精美数学艺术品。因此人们在悲哀、沮丧的同时也不断地在赞美罗素悖论。

4　康托重要证明与罗素悖论之间的本质联系

通过对康托那类证明与罗素悖论的比较可看出，康托的那类证明与罗素悖论的思路与作法在本质上是一致的:构造不同形式的 $x\notin f(x)$ 的元素组成某集合，然后进行发难，导出最终结果。两类数学证明都是‘对角线——矛盾法’的产品。

罗素应用对角线法是为了通过悖论来暴露逻辑矛盾，暴露科学理论体系中的缺陷，在客观上促使人们去完善科学理论体系，产生正向效应。而康托却是用对角线方法来制造悖论，然后再利用悖论中的逻辑矛盾及现有科学理论体系中的另外一些缺陷去推导出错误的结论（当然康托自己当时不知道可用对角线法来制造悖论，也不知道有罗素悖论）。这在客观上产生负向效应:以这类证明所推导出的错误结论为基础理论去推导出另一类相关的数学内容……（在与芝诺悖论、贝克莱悖论和调和级数悖论相关的数学内容中存在着完全相同的情况，因为他们都是现有经典无穷理论体系大家庭中的成员，直接受到经典无穷观、经典数谱和经典极限论中所存在的缺陷的影响[5~12]。

5　结　论

康托的那类‘重要证明’与罗素悖论的推导有相同的背景、相同的基础、相同的产生机制和相同的存在理由，在本质上是同一类东西。康托关于实数集合不可数证明及康托定理 $\overline{\overline{S}}<\overline{\overline{P(S)}}$ 证明实际上是罗素悖论的两个翻版，但是康托错用了罗素悖论，犯了两个逻辑错误。康托在如上两个证明中的思路与做法是错误的。

康托的这类证明成了数学中误用非构造性证明法的两个典型的反面教材，是与集合论基础理论密切相关的现有经典无穷理论体系的本质性缺陷及相关经典数谱和经典极限论的缺陷导致了这类错误的存在，使集合论中许多工作无法正常开展，特别是使基数理论的研究工作神秘又离谱[7~14]。

参考文献

[1] 欧阳耿．数学世纪难题‘连续统假设的证明’不存在(J)．喀什师范学院学报,2001,21(2),53－56.
[2] 欧阳耿．重新认识第三次数学危机(J)．喀什师范学院学报,2000,20(2),69－72.
[3] 欧阳耿．数学基础理论中的两个缺陷(J)．喀什师范学院学报,2001,21(1),44－48.
[4] 欧阳耿．无定义的实无穷概念是第三次数学危机的真正根源(J)．宜春学院学报,2005,26(4),26－29.
[5] 欧阳耿．重新认识第二次数学危机(J)．喀什师范学院学报,2002,23(3),82－86.
[6] 欧阳耿．又一个芝诺悖论的现代翻版——调和级数悖论(J)．喀什师范学院学报,2003,24(6),25－28.
[7] 欧阳耿．人类科学中现有经典极限论的终结(Ⅰ)(J)．喀什师范学院学报,2006,27(6),29－34.
[8] 欧阳耿．人类科学中现有经典极限论的终结(Ⅱ)(J)．喀什师范学院学报,2007,28(3),33－36.
[9] 欧阳耿．人类科学中现有经典极限论的终结(Ⅲ)(J)．喀什师范学院学报,2007,28(6),35－38.
[10] 欧阳耿．人类科学中经典无穷理论体系的终结(J)．喀什师范学院学报,2005,26(6),20－22.
[11] 欧阳耿．数学中三种新的数量形式(J)．喀什师范学院学报,2003,24(3),31－37.
[12] 欧阳耿．数学中实无穷与潜无穷的几个问题(J)．井冈山师范学院学报,1998,19(6),26－28.
[13] 欧阳耿．一条金辫 类比－相等性原理－基础理论学(J)．宜春学院学报,2004,26(4),23－25.
[14] 欧阳耿．新构建的基础理论学的意义、方法和任务(J)．宜春学院学报,2007,29(4),42－45.