静态球对称黑洞热力学与爱因斯坦场方程

程素君[1,2], 翟忠旭[1], 刘文彪[1]

(1. 北京师范大学 物理系, 北京师范大学 理论物理研究所, 北京 100875;
2. 河南新乡学院 物理系, 河南 新乡 453000)

摘要: 建立在广义相对论基础上的黑洞理论与热力学定律之间有着深刻的内在联系. 具体考虑球对称黑洞, 研究表明通过史瓦西黑洞和 Reissner-Nordstrom 黑洞在其视界附近的爱因斯坦场方程可以直接得到对应的黑洞热力学第一定律. 这揭示了爱因斯坦引力场方程与黑洞热力学的关系, 表明了在广义相对论理论框架下黑洞热力学规律的必然性.

关键词: 球对称黑洞; 能动张量; 爱因斯坦方程; 热力学第一定律; 黑洞热力学

中图分类号: P 145.7　　文献标识码: A　　文章编号: 1000-0712(2011)01-0023-03

黑洞理论是广义相对论应用的一个重要方面, 而 Bekenstein 对于黑洞熵的认识则更深入地揭示了引力理论与热力学之间的密切关系[1]. 人们早已指出, 黑洞存在着与热力学中的 4条定律一一对应的规律. 此时, 黑洞的温度可以表示为 $T=\kappa/2\pi$, 其中 κ 为黑洞的表面引力; 熵为 $S=A/4$, 而 A 为黑洞视界的面积; 能量为 $E=M$, M 为黑洞的质量. 对于最简单的史瓦西黑洞, 这些物理量之间的关系是 $T\mathrm{d}S=\mathrm{d}E$, 即黑洞热力学第一定律[2,3]. 考虑更为一般的黑洞, 第一定律也会发生相应的改变:

$$\mathrm{d}E=\frac{\kappa}{8\pi}\mathrm{d}A+\text{work term}$$

或者写为　$\mathrm{d}E=T\mathrm{d}S+\text{work term}$

式中的"work term"视具体的黑洞而定.

黑洞热力学第一定律实际上暗示了爱因斯坦场方程与热力学之间的关系, 因为黑洞解是从爱因斯坦场方程中推导出来的, 而反映时空几何性质的量(视界面积、表面引力等)与热力学系统的性质有关. Jacobson首先探索了其中的联系, 在给定假设的基础上, 可以从热力学第一定律推导出爱因斯坦场方程[4]. 这一研究思路也被应用在了宇宙学的研究中, 例如暴涨宇宙模型[5,6], 暗能量宇宙模型[7]等. 为了更清楚地探究爱因斯坦引力场方程与热力学定律之间的关系, 我们将具体探讨静态球对称时空下爱因斯坦场方程与热力学定律之间的对应关系, 结果发现爱因斯坦场方程将直接导致热力学第一定律的出现.

1 静态球对称时空

静态球对称时空度规的一般形式为[8]

$$\mathrm{d}s^2=-f(r)\mathrm{d}t^2+f^{-1}(r)\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\tag{1}$$

黑洞的视界面由 $f(r)=0$ 确定, 视界面的半径记为 r_0, 并且要求 $f'(r_0)\neq 0$. 从方程(1)出发, 由联络的计算公式 $\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(g_{\mu\nu,\lambda}+g_{\nu\lambda,\mu}-g_{\lambda\mu,\nu})$, 不难得到不为零的联络分量为:

$$\begin{cases}\Gamma^0_{01}=\Gamma^0_{10}=\dfrac{1}{2}f^{-1}(r)\dfrac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\\ \Gamma^1_{00}=\dfrac{1}{2}f(r)\dfrac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r},\quad \Gamma^1_{11}=\dfrac{1}{2}f(r)\dfrac{\mathrm{d}f^{-1}(r)}{\mathrm{d}r}\\ \Gamma^1_{22}=-rf(r),\quad \Gamma^1_{33}=-rf(r)\sin^2\theta\\ \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\dfrac{1}{r},\quad \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta\\ \Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=\dfrac{1}{r},\quad \Gamma^3_{32}=\Gamma^3_{23}=\cot\theta\end{cases}\tag{2}$$

然后由

$$R_{\mu\sigma}=\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma,\nu}-\Gamma^{\nu}_{\mu\nu,\sigma}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\lambda\nu}-\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\tag{3}$$

可计算不为零的 Ricci张量为:

$$R^0_0=-\frac{1}{2}f''-\frac{f'}{r}\tag{4}$$

$$R^1_1=-\frac{1}{2}f''-\frac{f'}{r}\tag{5}$$

$$R^2_2=R^3_3=\frac{1}{r^2}-\frac{f'}{r}-\frac{f}{r^2}\tag{6}$$

收稿日期: 2010-05-07; 修回日期: 2010-08-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10773002, 10875012)

作者简介: 程素君(1964—), 女, 河南辉县人, 河南新乡学院物理系副教授, 硕士, 主要研究黑洞热力学与宇宙学并从事教学教改研究工作.

相应的曲率标量为

$$R = -f'' - \frac{4f'}{r} + \frac{2}{r^2} - \frac{2f}{r^2} \tag{7}$$

可见, 曲率标量仅是坐标 r的函数.

2 史瓦西黑洞视界面的热力学性质

首先考虑爱因斯坦场方程

$$G^{\mu}{}_{\nu} = R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}R\,\delta^{\mu}_{\nu} = -8\pi T^{\mu}{}_{\nu} \tag{8}$$

方程左侧为爱因斯坦张量, 反映了时空的几何性质, 右侧为时空能量－动量张量, 反映了物质能量的分布性质. 由

$$G^{\mu}{}_{\nu} = R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}R\,\delta^{\mu}_{\nu} \tag{9}$$

可以计算得到爱因斯坦张量的两个分量为:

$$G^0_0 = -\frac{1}{r^2} + \frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r} \tag{10}$$

$$G^1_1 = -\frac{1}{r^2} + \frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r} \tag{11}$$

在黑洞视界面上, 有 $f(r_0) = 0$, $f'(r_0) \neq 0$, 因此有

$$G^0_0\Big|_{r=r_0} = G^1_1\Big|_{r=r_0} = -\frac{1}{r_0^2} + \frac{f'}{r_0} \tag{12}$$

可见, 在视界处, $t-t$分量的爱因斯坦场方程可表示为

$$-\frac{1}{r_0^2} + \frac{f'}{r_0} = -8\pi T^0{}_0 \tag{13}$$

上式两侧同时乘以$\frac{1}{2}r_0^2$, 可化为

$$\frac{1}{2}r_0 f' - \frac{1}{2} = -4\pi r_0^2 T^0{}_0 \tag{14}$$

在方程(14)两边乘以视界半径的微分 dr_0, 得

$$\frac{1}{2}r_0 f'\,dr_0 - \frac{1}{2}dr_0 = -4\pi r_0^2 T^0{}_0\,dr_0 \tag{15}$$

考虑到真空情况, 有能量－动量张量 $T^0{}_0 = 0$, 因而

$$\frac{1}{2}r_0 f'\,dr_0 - \frac{1}{2}dr_0 = 0 \tag{16}$$

对史瓦西黑洞, $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$, 由此确定的视界半径为 $r_0 = 2M$, M 即为史瓦西黑洞的质量. 此时, 方程(16)的第二项$\frac{1}{2}dr_0$实际上就是质量的微分 dM; 而第一项中 $\kappa = \frac{1}{2}f'\Big|_{r=r_0}$, 方程(16)化为

$$\frac{\kappa}{2\pi}d(\pi r_0^2) - dM = 0 \tag{17}$$

对于史瓦西黑洞, 我们有[9,10]

$$\begin{cases} E = M, & A = 4\pi r_0^2 \\ S = \frac{A}{4} = \pi r_0^2, & T = \frac{\kappa}{2\pi} \end{cases} \tag{18}$$

因此, $t-t$分量的爱因斯坦场方程(13)本质上就是黑洞热力学表达式

$$T\,dS = dE \tag{19}$$

3 Reissner－Nordstrom 黑洞视界的热力学性质

考虑 Reissner－Nordstrom 黑洞, 其静态荷电球对称时空的度规仍然可以用方程(1)表示. 与史瓦西黑洞的处理方式类似, 我们同样可以得到 Reissner－Nordstrom 黑洞视界处的爱因斯坦场方程的 $t-t$分量方程(13). 为此, 我们首先计算电磁场的能－动张量 $T_{\mu\nu}$[11,12]. 由狭义相对论和电动力学可以知道, 电磁场的能量－动量张量为

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{20}$$

其中电磁场张量为

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

因为静态荷电球外的电磁场为球对称分布, 所以在与荷电球相对静止的坐标系中, 只有沿 r方向的电场强度分量 E_1不为 0, 因此有

$$F_{\mu\nu} = E_1(r)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

利用度规表达式(1), 以及麦克斯韦方程 $F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = J^{\mu}$, 并注意到 $F^{\mu\nu}$的反对称性, 有

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{-g}F^{01}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\sin\theta E_1(r)\right] = 0$$

解得

$$E_1(r) = \frac{1}{r^2}Q \tag{22}$$

其中 Q 为积分常数, 根据无穷远欧几里德条件并利用高斯定理可知, Q 实际上就是荷电球体的总电荷. 将上面的计算结果代入式(20), 可以得到电磁场的能－动张量不为零的分量

$$T^0{}_0 = T^1{}_1 = -T^2{}_2 = -T^3{}_3 = \frac{Q^2}{8\pi r^4} \tag{23}$$

把方程(23)代入方程(15)得

$$\frac{1}{2}r_0 f' \mathrm{d}r_0 - \frac{1}{2}\mathrm{d}r_0 = -\frac{Q^2}{2r_0^2}\mathrm{d}r_0 \qquad (24)$$

对 Reissner-Nordstrom 黑洞, 视界依然由 $f(r)=0$ 确定. 因为 $f(r)=1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}$, M 为黑洞质量, Q 为黑洞所带电荷, 因此 Reissner-Nordstrom 黑洞的内、外视界为

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \qquad (25)$$

对外视界, 考虑方程 (24) 左边第一项, 有

$$\frac{1}{2}r_0 f' \mathrm{d}r_0 = \frac{1}{2}r_+ f' \mathrm{d}r_+ = \frac{f'}{4\pi}\mathrm{d}(\pi r_+^2) \qquad (26)$$

代入 $f'(r_+)$ 可得

$$\frac{1}{2}r_+ f' \mathrm{d}r_+ = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^2}\mathrm{d}(\pi r_+^2) = T\mathrm{d}S \qquad (27)$$

其中 $T=\frac{\kappa}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}f'(r_+)=\frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^2}$ 为 Reissner-Nordstrom 黑洞外视界温度, $S=\frac{A}{4}=\pi r_+^2$ 为黑洞熵. 考虑式 (24) 剩余两项, 因对外视界有

$$\mathrm{d}r_+ = \frac{r_+}{\sqrt{M^2-Q^2}}\mathrm{d}M - \frac{Q}{\sqrt{M^2-Q^2}}\mathrm{d}Q \qquad (28)$$

将上式代入式 (24) 剩余两项中, 得

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}r_+ - \frac{Q^2}{2r_+^2}\mathrm{d}r_+ = \frac{r_+^2 - Q^2}{2r_+^2}\left(\frac{r_+}{\sqrt{M^2-Q^2}}\mathrm{d}M - \frac{Q}{\sqrt{M^2-Q^2}}\mathrm{d}Q\right) = \mathrm{d}M - \frac{Q}{r_+}\mathrm{d}Q = \mathrm{d}M - V_+\mathrm{d}Q \qquad (29)$$

其中 $V_+ = \frac{Q}{r_+}$ 为黑洞视界两极处的静电势. 至此, Reissner-Nordstrom 黑洞视界处的爱因斯坦方程式 (24) 可以最终写成

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}M - V\mathrm{d}Q \qquad (30)$$

此即 Reissner-Nordstrom 黑洞的热力学第一定律.

黑洞热力学的研究, 显示出了引力理论与热力学定律之间存在着深刻的内在联系. 实际上, 近些年来, 人们关于爱因斯坦场方程与热力学之间的联系进行了广泛的研究[13-18]. 爱因斯坦场方程反应了物质能量与时空几何性质之间的直接联系, 而热力学第一定律则揭示了系统的物质能量和其几何性质的变化之间的关联属性, 从本质上讲二者是一致的. 本文通过对在史瓦西时空和 Reissner-Nordstrom 时空中爱因斯坦引力场方程在外视界面附近的讨论, 直接得到了黑洞热力学第一定律, 这对我们理解引力理论与黑洞热力学的关系具有很好的启示和帮助.

致谢: 作者感谢赵峥教授的富有启发性的指导和讨论, 也感谢周史薇和刘显明的帮助.

参考文献:

[1] Bekenstein J D. Black holes and entropy[J]. Phys Rev D, 1973, 7: 2333.

[2] Bardeen J M, Carter B, Hawking S W. The four laws of black hole mechanics[J]. Commun Math Phys, 1973, 31: 161.

[3] Hawking S W. Particle creation by black holes[J]. Commun Math Phys, 1975, 43: 199.

[4] Jacobson T. Thermodynamics of spacetime: The Einstein equation of state[J]. Phys Rev Lett, 1995, 75: 1260.

[5] Frolov A V, Kofman L. Inflation and de Sitter thermodynamics[J]. CAP 0305, 009(2003).

[6] Danielsson U H. Transplanckian energy production and slow roll inflation[J]. Phys Rev D, 2005, 71, 023516.

[7] Bousso R. Cosmology and the S matrix[J]. Phys Rev D, 2005, 71: 064024.

[8] Cai R G, Nobuyoshi Ohta. Horizon thermodyhamics and gravitational field equations in Horava-Lifshitz gravity [J]. Physl Rev D, 2010, 81: 084061.

[9] 刘辽, 赵峥, 等. 黑洞与时间的性质 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2008.

[10] Misner C W, Sharp D H. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse[J]. Phys Rev B, 1964, 136: 571.

[11] 梁灿彬. 微分几何入门与广义相对论 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2006.

[12] 刘辽, 赵峥. 广义相对论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[13] 胡波, 李翔, 赵峥. 热力学与时空几何 [J]. 北京师范大学学报 (自然科学版), 2000, 36: 752.

[14] Brown J D, York J W. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action[J]. Phys Rev D, 1993, 47: 1407.

[15] Padmanabhan T. Classical and Quantum Themodyhamics of horizons in spherically symmetric spacetimes[J]. Class Quant Grav, 2002, 19: 5387.

[16] Akbar M, Rong-Gen Cai. Thermodynamic behavior of field equations for $f(R)$ gravity[J]. Phys Lett B, 2007, 648: 243.

(下转 28页)

$u = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$的改变为无限大.

参考文献:

[1] 曹则贤. 质量与质量的起源[J]. 物理, 2008, 37(5): 355-358.

[2] Wilczek F. 公式 $F = ma$中的力从哪来? [J]. 黄娆, 译. 物理, 2005, 34(2): 93-95.

[3] Schwarz P M, Schwarz J H. Special Relativity[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 105-109.

[4] 郭汉英. 狭义相对论中的质量、能量与对称性[J]. 现代物理知识, 2008, 20(2): 31-35.

[5] Landau L D, Lifshitz E M. The Classical Theory of Fields [M], Translated by Hamermesh M. Oxford: Pergamon Press, 1951: 27-30

The inertial mass in Newtonian mechanics and special relativity

CHEN Fang-Pei

(Department of Physics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

Abstract It is described respectively in detail how the concepts of inertia and inertial mass are introduced in both the Newtonian mechanics and the special relativity. The proper (or rest) mass of a particle has been shown clearly that it is exactly equal to its inertial mass in the special relativity as in the Newtonian mechanics. Through analysis, it is pointed out and emphasized that the relative (or moving) mass is only a prescription but not a results due to that the inertial mass of moving particle has changed really. Finally, the specific property that the particles with zero rest mass and with light speed comply with special relativity but not comply with Newtonian mechanics is explained.

Key words Newtonian mechanics; special relativity; inertia; inertial mass

(上接 25页)

[17] Paranjape A, Sarkar S, Padmanabhan T. Thermodynamic route to field equations in Lanczos-Lovelock gravity[J]. Phys Rev D, 2006, 74: 104015.

[18] Wang G, Liu W B. Nonequilibrium thermodynamics of dark energy on cosmic apparent horizon[J]. Communications in Theoretical Physics, 2009, 52: 383.

Thermodynamics of a spherically static black hole and Einstein equation

CHENG Su-jun[1,2], ZHAI Zhong-xu[1], LIU Wen-biao[1]

(1. Department of Physics and Institute of Theoretical Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;

2. Department of Physics, Xinxiang University, Xinxiang, Henan 453000, China)

Abstract There is an interesting relation between the black hole theory under general relativity and thermodynamics. Considering a spherically static black hole, Einstein equation near the horizon of a Schwarzschild or Reissner-Nordstrom black hole can be deduced into the first law of thermodynamics. This can show the relation between Einstein equation and the black hole thermodynamics. It also reflects the consistence of the two theories.

Key words spherically symmetric black hole; energy-momentum tensor; Einstein equation; the first law of thermodynamics; black hole thermodynamics