西北大学学报 (自然科学版)
2006年 12月,第 36卷第 6期, Dec. ,2006,Vol 36,No. 6
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)

高斯的内蕴微分几何与非欧几何

陈惠勇[1,2]

(1. 中国科学院 数学与系统科学研究院; 2. 中国科学院 研究生院,北京 100080)

摘要:目的 分析与研究高斯关于非欧几何的研究和内蕴微分几何思想之间的联系。方法 文献分析研究和数学史比较研究。结果 总结分析了高斯建立的内蕴微分几何的思想和渊源,揭示了其与非欧几何学的内在联系。结论 高斯于 1827年发表的《关于曲面的一般研究》,一方面奠定了内蕴微分几何的基础,同时也以其独特的"高斯风格 将自己的非欧几何研究揭示于众。

关 键 词:高斯 (C. F. Gauss, 1777—1855);内蕴微分几何学;非欧几何;高斯曲率;高斯 - 博内定理

中图分类号: O112 文献标识码: A 文章编号: 1000-274X (2006) 06-1028-05

微分几何起源于微积分在几何上的应用,但微分几何真正成为一门独立的学科,则奠基于高斯 (C. F. Gauss 1777—1855) 于 1827年 10月 8日发表的《关于曲面的一般研究》。高斯在这一伟大的著作中精辟地阐述了微分几何的一系列全新的重要概念和定理,以及展开内蕴微分几何的重要计划。正是在这个意义上,我们说高斯奠定了微分几何的基础,标志着微分几何作为一门独立学科的诞生。然而,在高斯创立内蕴微分几何的时期,他已经发现了非欧几何学。为什么高斯没有发表他的非欧几何学?他正在创立的内蕴微分几何与他已经发现的非欧几何学之间有什么内在的联系?高斯又是在怎样的思想背景下创立内蕴微分几何的?本文试图对这些问题作一初步的探究。

1 高斯内蕴微分几何思想的渊源

高斯关于微分几何方面的工作,一方面可溯源于他早年关于欧几里得平行公理的独立性的证明,这一年是 1792年 (高斯只有 15岁);另一方面,则主要源于他的大地测量工作 (1818—1828)。高斯在这两方面的工作都涉及一个共同的理论基础,即三角几何学 (欧几里得的三角几何学、球面三角几何学、双曲三角几何学以及曲面的三角几何学),特别的是在这些三角几何学中,关于一个三角形或多边形的内角和定理。高斯关于这些问题的第一个深刻思想发生在 1794年 (这一年高斯 17岁)。我们可以从高斯于 1846年 10月给 Gerling的信中看到这一记录:"Schweikart先生向你提到的定理,即在任何的几何中,一个多边形之外角和在数量上不等于 360°,……而是成比例于曲面的面积,这几乎是这一理论之开端的第一个重要定理,这个定理的必要性我已于 1794年认识到了"[1]。当然,高斯在此讨论的是双曲三角几何学的情形。在球面三角几何学的情形,角之盈余的这一定理在那时已经被普遍地认识到。

欧几里得系统地研究了有关直线、平面、圆和球的几何性质,并用公理化的方法将前人的理论总结为《几何原本》。其中有两个最基本的定理:毕达哥拉斯定理 (勾股定理);任意三角形的内角和等于 180°。从现代几何的观点来看:勾股定理之本质乃是几何空间的度量性质,在大部分有意义的几何空间中,都要求这条定理在无穷小的情形下成立;三角形的内角和等于 180 的定理,本质上是说平面是平坦的而不具有曲率。因此,可以说欧几里得几何是非欧几何在无穷小的情形下的近似,而几何空间的度量性质则是展开所有可能的几何学的基本假设前提,这就是黎曼 (G. F. Bernhard Riemann, 1826—

收稿日期: 2006-06-21
基金项目:国家自然科学基金资助项目 (10371119)
作者简介:陈惠勇 (1964—),男,江西上饶人,中国科学院博士生,从事近现代数学史研究。

1866)于 1854年所作的著名的就职演说 ——《关于几何基础的假设》

勒让德 (A. M. Legendre, 1752—1833)首先指出(1794年):三角形的内角和等于 180°等价于欧氏几何的第五公设 (平行公理),而外角和定理与内角和定理是等价的。对于三角形来说其外角和在数量上不等于 360°就等价于说三角形的内角和不等于 180°[1]。

由此可见,高斯所思考的问题,以及在解决实际的地理测量问题时所赖以依靠的理论基础问题之深刻,他直接向欧几里得几何提出挑战,并最终导致高斯的内蕴微分几何以及非欧几里得几何的诞生。

2　高斯的非欧几何研究

从高斯的遗稿,以及他与 Wolfgang Bolyai (1804), Schumacher (1816), Olbers (1817), Schweikart(1819), Taurinus(1824)等人的信件中,可知高斯关于非欧几何研究的主要结果是从与第五公设相反的假设,展开逻辑上相容的而与欧氏几何完全相异的几何。

在 1819年给 Schweikart的信上,他已经写着关于新几何的自己的成就:"……我已经发展星空几何到这种程度,只要知道常数 C的话,便完全可以解决所有课题"[1]。在 1824年给 Taurinus的信中,他说:"三角形的三角之和小于 180°,这假定导引到特殊的,与我们的几何完全相异的几何。这几何是完全一贯的,并且我发展它本身,结果完全令人满意。除了某一个常数的值不能先天地予以表示定义以外,在这几何里我能解决任何课题。我们给予这常数值愈大,则愈接近欧几里得几何,而且它的无穷大值会使得双方系统合而为一"[1]。

那么,高斯为什么不出版自己的研究呢?长期以来,人们一直以高斯在 1829年给 Bessel的信札中写到的话:"恐怕我还不能够迅速修改关于这个问题的自己很广泛的研究,使它可以出版,甚至在我的一生里可能不能解决这件事,因为当我发表自己的全部意见时,我害怕会引起波哀提亚人的叫嚣"[1]。作为高斯没有公开发表的非欧几何研究的证明。然而,问题真得那么简单吗?

高斯的非欧几何研究,有两个核心的问题:三角形内角之和小于 180°的假定 (第五公设之否定);常数 C。第一个问题就是角之盈余或亏量,而常数 C又称为绝对长度单位,它与高斯曲率 K相关且等于 $\frac{1}{\sqrt{|K|}}$。以下,我们分析高斯是如何解决这两个核心问题的。

3　高斯内蕴微分几何的基本思想

正如黎曼在《关于几何基础的假设》中所指出的:"我们首先想做的就是,从数量的最一般观念出发去建立一个多重广义尺度的概念。由此可知一个多重广义尺度应包容各种各样的度量关系,而通常的空间仅是三重广义尺度的一个特殊情形"[4]。由此可见,黎曼的核心思想是要建立所谓的多重广义尺度中的各种各样的度量关系,从而展开各种各样的几何学。这正是有别于欧氏几何的各种几何学,而欧氏几何学成为"一个特殊情形"。实际上,这一光辉思想在高斯的内蕴微分几何学中已经得到了体现。

我们已经指出勾股定理之本质乃是几何空间的度量性质,高斯正是从这里出发建立了曲面的第一基本形式 $d\vec{r}^2 = ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$。其意义就是:在正确到高阶无穷小范围内,曲面是等长地对应于切平面上的无穷小区域,从而展开其内蕴微分几何的系统研究。然而,曲面的第一类基本量 E, F, G是 u, v的函数,并且完全确定了曲面的内蕴度量。对于曲面上的曲线 $u = u(t), v = v(t)$即 $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$的弧长等于弧长元素 ds沿曲线的积分,即可以用积分

$$S = \int ds = \int \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

来表示。如果长度被确定了,那么作为曲线长度的下确界的距离也就被确定了。因此,光滑曲线的内蕴度量是由第一基本形式来确定的。专门研究曲面上由第一基本形式决定的几何学称为内蕴几何学,它在高维的推广就是现在所称的黎曼几何学。因此,我们说高斯通过推广长度概念 (勾股定理)引进了第一基本形式,从而解决了展开其内蕴几何的基础,即度量问题。这是几何学历史上的一次重大的突破。

高斯在《关于曲面的一般研究》的第 13部分,阐述了他的内蕴几何学的思想,并对内蕴几何学的概念作了如下的描述:"……我们考虑曲面非为体的边界,而是看成某个一维消失了的体。此外,这曲面是柔韧的但不能被拉长,那么曲面的性质往往只与在给定的瞬刻所采取的形状有关,并且往往是绝对的,那就是无论怎样弯曲总是保持不变。如同在我们所做出的这些表达式的意义上来说,曲率度量和

全曲率是属于我们所说的性质,对它们的研究开辟了几何学上新的富有成果的领域;其次是关于短程线的研究和另外一些我以后要研究的内容”(然后高斯特别研究了曲面上的三角形)。

在这里高斯提出了一个全新的概念:“考虑曲面非为体的边界,而是看成某个一维消失了的体”,即一个曲面本身就是空间。然而,高斯以前的几何学家在研究曲面时,总是将曲面与外围空间相联系,高斯论述的几何学则是“与曲面可能具有的形状无关”,即与外在空间无关,从而建立了以研究曲面的内在性质为主的内蕴几何学,开创了微分几何的新时代。接下来,高斯继续说道:“按照这个观点,对平面和可以展开成平面的曲面(例如圆柱面,圆锥面)基本上可以看成是相同的。按照这个观点对于曲面的一般表达式来说,现在的出发点是形式 $\sqrt{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2}$。它表示弧长元素 $\mathrm{d}s$ 和两个变数 u, v 之间的关系”[1]。

高斯正是以此为出发点,系统地研究了曲线的长度、曲线间的夹角、区域的面积和曲线的测地曲率,最后曲面在给定点处的曲率度量,或者如高斯所确切地说的曲面的比值曲率可以用系数 E, F, G 或者其偏微商的已知公式来表示。高斯给出了研究正则曲面上内蕴几何学的一般解析方法。最后,高斯和他的继承者证明了许多内蕴几何学的定理。正如高斯自己所说的那样“开辟了几何学上新的富有成果的领域”[1]。以下是内蕴微分几何学的两个最重要的定理。

3.1 高斯的绝妙定理“Theorema egregium”

1825年,高斯获得了核心的结果——“高斯方程”,进而对“高斯方程”做出几何上的解释,得出了被他自己称为“绝妙定理”的著名定理。

1822年,高斯获得了在保形坐标系下,如果曲面的线元素为 $\sqrt{m^2(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)}$,仅从曲面的第一基本形式计算高斯曲率的公式为[1]:

$$K = -\frac{1}{m^2}\left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log m}{\partial v^2}\right)。$$

1825年,高斯获得了在测地极坐标系下,仅从曲面的第一基本形式计算高斯曲率的公式[1]: $K = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu}$。

1825年,高斯获得了在任意的坐标系下,仅从曲面的第一基本形式计算高斯曲率的公式。高斯经过一系列复杂而惊人的计算,获得了其著名的《关于曲面的一般研究》的核心结果,即我们现在所称的“高斯方程”:

$$4(EG - F^2)^2 K = E(E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2) + F(E_u G_v - E_v G_u - 2E_v F_v + 4F_u F_v - 2F_u G_u) + G(E_u G_u - 2E_u F_v + E_v^2) - 2(EG - F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu})。$$

它表明高斯曲率 K 仅含第一类基本量 E, F, G 和它的一阶或二阶偏微商(因而是内蕴量)。

在接下来的第12部分,高斯证明了如果两曲面之间存在保长对应,那么它们有相同的第一类基本量,即第一基本形式不变。这样,高斯给出了上述“高斯方程”的几何解释,即被高斯自己称为绝妙定理“Theorema egregium”的著名定理:

定理 如果一曲面可以展开到另一曲面上,那么在每一对应点处的曲率测度保持不变。

推论 任何可以展开到另一曲面上的曲面的有限部分将保持相同的曲率积分。

有意思的是,高斯自己在证明其绝妙定理时,并没有直接运用“高斯方程”,但却从他自己的角度说明了这一发现的几何学起源。高斯的出发点是以下的基本定理“小测地三角形的内角和与两直角的差之盈余”(这就是高斯-博内定理)。然而在这里,总曲率测度之盈余还没有通过高斯曲率上的积分来定义,但却是直接作为三角形的球面映像的“定向”曲面的面积。高斯把这一定理表示为如下的结果:

定理 在 E^3 中的一个曲面上的(小)测地三角形 Δ 的内角和等于 π 与三角形 Δ 的球面映像的定向面积之和,这里定向面积取正或取负,取决于当沿着三角形 Δ 的边界环绕时,三角形 Δ 的球面映像的边界是否沿着相同或相反的方向环绕。

在一个可展曲面或一个球面的特殊情形,以上的结果已经被普遍地认识到,而高斯则于1794年在双曲几何的情形下获得了相似的结果,并于1819年给 Gerling的信中告知这一结果[1]。因此,我们可以得到,从这种基础情形的知识以及在1812—1822年间所获得的关于测地线方面的非常丰富的微分几何学经验的基础之上,高斯已经获得了上述定理对于一个非常数高斯曲率的曲面的一般情形下的正确性的几何直觉的深刻认识。

高斯最后证明了:E^3 中的曲面 M 和 M' 在等距(“可展”)变换 $f: M \to M'$ 下,曲面 M 上的区域 D_ε 在高斯映照下的球面映像的定向区域的面积 $K\int(D_\varepsilon)$ 等于曲面 M' 上的区域 D_ε' 在高斯映照下的球面映像的定向区域的面积 $K\int'(D_\varepsilon')$。

当 $\varepsilon \to 0$ 时,取极限,得到如下结果:

$$K(A) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{K(D_\varepsilon)}{D_\varepsilon\text{的面积}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{K(D'_\varepsilon)}{D'_\varepsilon\text{的面积}} = K'(A')$$

这就是说, E^3 中的两个曲面 M 和 M' 在等距变换 $f: M\to M'$ 下,其对应点 A 和 A' 的高斯曲率相等。这就是高斯的绝妙定理"Theorema egregium"。

3.2　高斯 - 博内定理

高斯于 1825年发现小测地三角形的内角和定理,并把它推广成为关于曲率积分的公式。得到了"整个曲面理论中最优美的定理":

定理　一个由凹 - 凹曲面的最短线构成的三角形的内角之和与 180°之差的盈余,或者一个由凹 - 凸曲面的最短线构成的三角形的内角之和与 180°之差的亏量,等于在球面映射下相应于三角形的球面映像部分的面积,其方向取其法向。如果相应于三角形的球面映像部分是整个球面,则等于 720°(即 4π)。

更一般地,在一个每条边都是由最短线构成的任意的 n边形中,则 n边形内角和与直角的 $(2n-4)$ 倍之差的盈余,或者与直角的 $(2n-4)$ 倍之差的亏量 (取决于曲面的性质),等于球面映射下相应于多边形的球面映像部分的面积。如果相应于多边形的球面映像部分是整个球面,则等于 720°(即 4π)。

这就是,高斯 - 博内定理:

$$\iint K d\sigma = A + B + C - \pi。$$

这里 K为曲面的高斯曲率, $d\sigma$表示三角形 ABC的面积元素。当曲面的高斯曲率为常数 (即所谓常数高斯曲率曲面) 时,就得到上述的结果。

高斯在接下来的第 21至 29部分,利用上述定理来研究测地三角形,建立了角度比较定理和面积比较定理,并且通过实际的地理测量得出了地球表面的测地三角形与相应的平面三角形的各内角的修正值。高斯在摘要中写道:"作者使用的一个地表测地三角形即为一个例子。该三角形的最大边长近 15里①,其内角和与两直角之差约等于 15″。相应的平面三角形的各内角的修正值分别为 4.″951 13, 4.″951 04, 4.″951 31…"[4]。

4　结　论

从上面的分析,我们可以清楚地看到:高斯 - 博内定理揭示了从欧氏几何学到非欧几何学的发展历史。这一历史的发展过程,实际上就是从平面几何到常数高斯曲率曲面上的几何学的发展。更一般地,到抽象曲面上的几何学。在这一推广过程中,直线换成了测地线 (最短线),相对曲率换成了测地曲率。其根本的不同之处在于所论的"空间"的高斯曲率的不同,也就是"空间"的度量结构不同。

欧氏"空间"的高斯曲率为零,由高斯 - 博内定理有 $A+B+C=\pi$。这就是"三角形的三内角之和等于 180°"的定理;非欧几何的"空间"的高斯曲率不为零,由高斯 - 博内定理有"三角形的三内角之和不等于 180°",因此该"空间"是弯曲的!由于高斯曲率的符号的不同,影响了"空间"中的测地线的性状不同,从而也决定了测地三角形的内角和的不同。一般地,对于三维常数高斯曲率空间,我们有以下 3种情形:曲率为正常数 ——黎曼非欧几何 (球面几何);曲率为负常数 ——罗巴切夫斯基非欧几何 (双曲几何);曲率恒等于零 ——欧几里得几何。

因此,由于对几何学基础问题的深入研究与思考,特别是关于几何空间的度量性质的研究和推广,高斯最终建立了研究由曲面的第一基本形式决定的内蕴微分几何学。这样,高斯不仅解决了他在非欧几何研究中的两个核心的问题,而且深刻地阐述了两者的内在联系。这是否就是高斯要解决的"所有课题"? 如果这种认识能够成立的话,那么,高斯于 1827年发表的《关于曲面的一般研究》是否实质上蕴涵了高斯的非欧几何研究?数学史表明,后来黎曼对内蕴微分几何的高维推广,以及 19世纪后期 E. Beltrami, F. Klein, H. Poincare等关于非欧几何的发展与确认,无不遵循着高斯的思路。也许这正是高斯的高明之处 ——既没有引起"波哀提亚人的叫嚣",又以他自己独特的"高斯风格"发表了他的非欧几何研究。

参考文献:

[1] GAUSS C F. Werke Ⅳ[M]. Gottingen: Königlichen Gesellschaft der Wlsse Nschaften, 1880: 217-258; Ⅷ226; 381; 442; 435-436; 182.

[2] DOMBROWSKI P. 150 YEARS AFTER GAUSS 'disquisitiones generales circa superficies curvas [J]. Asterisque, Soc Math, France, 1979, (62): 1-153.

[3] BONOLA R. Non-Euclidean Geometry [M]. New York: Dover Publications Inc, 1955: 64-75.

[4] 李文林. 数学珍宝 ——历史文献精选 [M]. 北京:科

① 这一德制里等于赤道上与 4 球心角对的弧长,即 7.42 km,约等于 4.6英里。

学出版社, 1998: 565-570.
[5] 吴文俊. 世界著名数学家传记 [M]. 北京:科学出版社, 1995: 749-773.
[6] 陈省身. 关于高斯 - 博内的历史注记 [M] //张洪光. 陈省身文选. 北京:科学出版社, 1989: 278-286.
[7] 丘成桐. 时空的历史 [J]. 中国数学会通讯, 2005, (4): 10-22.
[8] 亚力山大洛夫 A Γ. 凸曲面的内蕴几何学 [M]. 吴祖基,译. 北京:科学出版社, 1962.

(编 辑 姚 远)

Gaussian Intrinsic differential geometry and non-euclidean geometry

CHEN Hui-yong[1,2]

(1. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Science, Beijin 100080, China; 2. Graduate School of the Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China)

Abstract: Aim To study the relations between the thought of Gaussian intrinsic differential geometry and Gauss′s earlier research on non-Euclidean geometry. **Methods** Sources investigation and analysis, and the comparative historical approach of mathematics. **Results** A view of better understanding origins of Gaussian intrinsic differential geometry is presented, and the intrinsic relation between Gauss′s thought of intrinsic differential geometry and of his non-Euclidean geometry is brought to light and discussed. **Conclusion** By presenting his disquisitions generales circa superficies curves in 1827, Gauss presented in fact the essential idea of his earlier research on non-Euclid geometry in his unique way as well.

Key words: Gauss (1777—1855); intrinsic differential geometry; non-Euclidean geometry; Gaussian curvature; Gauss-Bonnet Theorem

·学术动态·

《中国科技论文在线》期刊创刊

《中国科技论文在线》(刊号: CN11-5484/N)是由教育部主管,教育部科技发展中心主办的学术刊物,主要报道涵盖自然科学领域的基础研究和应用研究方面具有重要意义和创新性的最新成果。由《中国科技论文在线》期刊编辑部出版,月刊。

《中国科技论文在线》要求投稿人的文章应先在中国科技论文在线网站上发表,对在线论文进行同行专家评审后,所评出的优秀论文作为本期刊的主要稿源。为了方便广大科研人员,尤其是读者群的订阅,每一期将相对集中几个学科。

(薛 鲍)