文章编号: 1673-095X(2011)01-0085-04

非阿基米德赋 p 范空间中等距映射的刻画

刘 猛, 宋眉眉
(天津理工大学 理学院, 天津 300384)

摘 要: 本文给出了非阿基米德赋 p 范空间以及赋 $(2,p)$ 范空间 $(0<p\leq 1)$ 的定义,并给出了在严格凸的非阿基米德赋 p 范空间以及赋 $(2,p)$ 范空间上等距映射的一些性质,得到了非阿基米德赋 p 范空间以及赋 $(2,p)$ 范空间上的 Mazur-Ulam 定理.

关键词: 非阿基米德域; 非阿基米德赋 p 范线性空间; 非阿基米德赋 $(2,p)$ 范线性空间; Mazur-Ulam 定理
中图分类号: O177.91 **文献标识码**: A **doi**: 10.3969/j.issn.1673-095X.2011.01.021

Characterization on isometry in non-Archimedean P-normed spaces

LIU Meng, SONG Mei-mei
(School of Science, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China)

Abstract: In this paper, we establish non-Archimedean p-normed spaces $(0<p\leq 1)$ and Non-Achimedean $(2,p)$-normed spaces, and obtain some characters of isometry mappings on non-Archimedean p-strictly convex normed spaces, andestablish Marzur-Ulam theorem in it.

Key words: non-Achimedean field; non-Achimedean p-normed spaces; non-Achimedean $(2,p)$-normed spaces; Mazur-Ulam theorem.

1 预备知识

定义 1.1[1] 若从数域 K 到 $[0,\infty)$ 的映射 $|\cdot|$ 满足以下几个条件: $|r|=0$ 当且仅当 $r=0$; $|rs|=|r|\,|s|$; 并且 $|r+s|\leq\max\{|r|,|s|\}$, 其中 $r,s\in K$. 则数域 K 被称为非阿基米德域.

注: 由定义可知 $|1|=|-1|=1$ 并且 $|n|\leq 1$, 其中 $n\in N$.

定义 1.2[1] 设 X 是定义在非阿基米德数域 K 上的向量空间,范数 $\|\cdot\|: X\to[0,\infty)$ 被称为非阿基米德泛函,如果它满足以下条件:

1) $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$;

2) $\|rx\|=|r|\,\|x\|\ (r\in K, x\in X)$;

3) $\|x+y\|\leq\max\{\|x\|,\|y\|\}\ (x,y\in X)$.

则 $(X,\|\cdot\|)$ 被称作非阿基米德赋范空间.

定义 1.3[2] 设 K 是满足条件 $|2|=1$ 的非阿基米德域, X 是域 K 上的非阿基米德赋范线性空间,对于 $x,y\in X$, 若满足 $\|x+y\|=\max\{\|x\|,\|y\|\}$, 且 $\|x\|=\|y\|$ 可推出 $x=y$. 则称 X 是严格凸的非阿基米德赋范线性空间.

Mazur 和 Ulam[3] 在 1932 年提出了著名的 Mazur-Ulam 定理: 若 f 是从实赋范向量空间 X 到实赋范向量空间 Y 上的一个等距映射,且 $f(0)=0$. 那么 f 是线性的.

1970 年, Aleksandrov[4] 提出这样一个问题 "在什么样的条件下,保持距离 r 的映射是等距的?" 在本文中, 利用文献 [5], [6] 和 [7] 中解决 Aleksandrov 问题的思想方法,我们给出了在非阿基米德赋 p 范空间和非阿基米德赋 $(2,p)$ 范空间 $(0<p\leq 1)$ 中等距映射的一些性质,并推出了非阿基米德赋 p 范空间和非阿基米德赋 $(2,p)$ 范空间中的 Mazur-Ulam 定理.

收稿日期: 2010-11-19.
基金项目: 天津市高等学校科技发展基金(20060402).
作者简介: 刘 猛(1985—), 男, 硕士研究生.
通讯作者: 宋眉眉(1966—), 女, 博士, 教授, E-mail: songmeimei@tjut.edu.cn.

2 非阿基米德赋 p 范空间的一些性质

定义 2.1 设 X 是定义在非阿基米德数域 K 上的向量空间. 范数 $\|\cdot\|: X\to[0,\infty)$ 被称为非阿基米德赋 P 范数($0<P\leq 1$),若它满足以下条件:

1) $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$;

2) $\|rx\|=|r|^{p}\|x\|$ $(r\in K, x\in X)$; 3) $\|x+y\|\leq\max\{\|x\|,\|y\|\}$ $(x,y\in X)$. 则$(X,\|\cdot\|)$称为非阿基米德赋 p 范空间.

定义 2.2 设 K 是非阿基米德域,X 是域 K 上的非阿基米德赋范线性空间,对于 $x,y\in X$,若满足 $\|x+y\|^{\frac{1}{p}}=\max\{\|x\|^{\frac{1}{p}},\|y\|^{\frac{1}{p}}\}$,且 $\|x\|^{\frac{1}{p}}=\|y\|^{\frac{1}{p}}$ 可推出 $x=y$. 则称 X 是 P 严格凸的非阿基米德赋范线性空间.

引理 2.3 设$(Y,\|\cdot\|)$为定义在非阿基米德域 K 上的非阿基米德赋 p 范空间,域 K 满足条件 $|2|=1$,且$(Y,\|\cdot\|)$为 p 严格凸的,取 $a,b\in Y$. 则$\frac{a+b}{2}$是 Y 中唯一的点满足到两个点 a 和 b 的距离为 $\|a-b\|$.

证明 若 $a=b$,则结果显然成立. 令 $a\neq b$,则点$\frac{a+b}{2}$到两点 a 和 b 的距离分别为:

$$\|a-\frac{a+b}{2}\|=\|\frac{a-b}{2}\|=\|a-b\|;$$

$$\|b-\frac{a+b}{2}\|=\|\frac{b-a}{2}\|=\|a-b\|.$$

取 $x,y\in Y$,且满足 $\|a-x\|=\|a-y\|=\|b-x\|=\|b-y\|=\|a-b\|$. 则

$$\|a-\frac{x+y}{2}\|\leq\max\{\|\frac{a-x}{2}\|,\|\frac{a-y}{2}\|\}=\|a-b\| \qquad (1)$$

同样可以得到

$$\|b-\frac{x+y}{2}\|\leq\|a-b\| \qquad (2)$$

如果不等式(1)和(2)均是严格成立的,那么可以得到

$$\|a-b\|\leq\max\{\|a-\frac{x+y}{2}\|,\|b-\frac{x+y}{2}\|\}<\|a-b\|,$$

推出矛盾. 则(1)和(2)中至少有一个等式是成立的. 不失一般性我们假设(1)式的等号成立. 则可得到 $\|a-\frac{x+y}{2}\|=\max\{\|\frac{a-x}{2}\|,\|\frac{a-y}{2}\|\}$,

$$\|a-\frac{x+y}{2}\|^{\frac{1}{p}}=\max\{\|\frac{a-x}{2}\|^{\frac{1}{p}},\|\frac{a-y}{2}\|^{\frac{1}{p}}\}$$

且 $\|\frac{a-x}{2}\|^{\frac{1}{p}}=\|\frac{a-y}{2}\|^{\frac{1}{p}}$.

根据严格凸的性质,可得$\frac{a-x}{2}=\frac{a-y}{2}$,从而得出 $x=y$.

定理 2.4 设 X,Y 是定义在非阿基米德域 K 上的两个非阿基米德赋 p 范空间,其中域 K 满足条件 $|2|=1$,同时 Y 是 p 严格凸的. 若 $f: X\to Y$ 满足

$\|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|$,则 $f-f(0)$ 是可加的.

证明 令 $g(x)=f(x)-f(0)$. 则 g 是一个等距映射,同时 $g(0)=0$.

$$\|g(\frac{x+y}{2})-g(x)\|=\|\frac{x+y}{2}-x\|=\|x-y\|=\|g(x)-g(y)\| \quad (x,y\in X)$$

类似可得

$$\|g(\frac{x+y}{2})-g(y)\|=\|g(x)-g(y)\| \quad (x,y\in X)$$

由引理 2.3 可知

$$g(\frac{x+y}{2})=\frac{g(x)+g(y)}{2}.$$

又因为 $g(0)=0$,则可以得到 $g=f-f(0)$ 是可加的.

定理 2.5 设 X,Y 是定义在非阿基米德域 K 上的两个非阿基米德赋 p 范空间,其中域 K 满足条件 $|2|=1$,同时 Y 是 p 严格凸的. 如果 $f: X\to Y$ 满足 $\|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|$,则空间中线段的中点是保持 f-不变的,即对任意的 $x_0,x_1\in X$ 且 $x_0\neq x_1$,则在空间 Y 中,$f(\frac{x_0+x_1}{2})$ 是以 $f(x_0)$ 和 $f(x_1)$ 为端点的线段的中点.

证明 类似于定理 2.4 的证明,可以得到

$$\|f(x_0)-f(\frac{x_0+x_1}{2})\|=\|x_0-\frac{x_0+x_1}{2}\|=|\frac{1}{2}|^{p}\|x_0-x_1\|=\|f(x_0)-f(x_1)\|.$$

同样可得,

$$\|f(x_1)-f(\frac{x_0+x_1}{2})\|=\|f(x_0)-f(x_1)\|.$$

利用引理 2.3 就得到了

$$f(\frac{x_0+x_1}{2})=\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$$

因此线段的中点是保持 f-不变的.

3　非阿基米德赋$(2,p)$范空间的一些性质

定义 3.1　设定义在非阿基米德域 K 上的维数大于 1 的向量空间,泛函 $\|.,.\|:X\times X\to R$ 被称为非阿基米德赋$(2,p)$范数$(0<p\leqslant 1)$,若它满足以下条件:

1) $\|x,y\|=0$, 当且仅当 x,y 是线性相关的;

2) $\|x,y\|=\|y,x\|$;

3) $\|rx,y\|=|r|^p\|x,y\|(r\in K,x,y\in X)$;

4) $\|x,y+z\|\leqslant\max\{\|x,y\|,\|x,z\|\}(x,y,z\in X)$.

引理 3.2　设$(X,\|.,.\|)$为非阿基米德赋$(2,p)$范空间. 则 $\|x,y\|=\|x,y+rx\|$,其中 $x,y\in x,r\in k$.

证明　根据非阿基米德赋$(2,p)$范空间的定义,可得

$\|x,y+rx\|\leqslant\max\{\|x,y\|,\|x,rx\|\}$ 且 $\|x,rx\|=|r|^p$. $\|x,x\|=0$,

则 $\|x,y=rx\|\leqslant\|x,y\|$

另外, $\|x,y\|=\|x,y+rx-rx\|\leqslant\max\{\|x,y+rx\|,\|x,-rx\|\}$ 及 $\|x,-rx\|=0$,

所以 $\|x,y\|\leqslant\|x,y+rx\|$.

由此可得 $\|x,y\|=\|x,y+rx\|$ 等式得证.

定义 3.3　设 X 是非阿基米德域 K 上非阿基米德赋$(2,p)$范线性空间,取 X 中的非零向量 x,y,记 $V(x,y)$ 为由 x 和 y 生成的 X 的子空间. 非阿基米德域 K 上的非阿基米德赋$(2,p)$范线性空间称为 p 严格凸的,若满足以下条件: 任意 $x,y,z\in X$,

$\|x+y,z\|^{\frac{1}{p}}=\max\{\|x,z\|^{\frac{1}{p}},\|y,z\|^{\frac{1}{p}}\}$ 且 $\|x,z\|^{\frac{1}{p}}$ 和 $z\notin V(x,y)$,则可以推出 $x=y$.

定义 3.4[8]　设 X 和 Y 是非阿基米德赋 2 范空间,令 $f:X\to Y$ 是一个映射,则 f 称为 2 - 等距的,若 $\|x-z,y-z\|=\|f(x)-f(z),f(y)-f(z)\|$, 对 X 中任意点 x,y 和 z 成立.

引理 3.5　设 X 是定义在非阿基米德域 K 上的严格凸的非阿基米德赋$(2,p)$范空间,其中域 K 满足 $|2|=|3|=1$. 任取满足 $\|x-y,x-z\|\neq 0$ 的三点 $x,y,z\in X$. 则 $\frac{x+y+z}{3}$ 是 X 中唯一的点 u 满足以下条件

$\|x-y,x-u\|=\|y-z,y-u\|=\|z-x,z-u\|=\|x-y,x-z\|$.

证明　令 $u=\frac{x+y+z}{3}$. 根据引理 3.2 可知

$\|x-y,x-u\|=\|x-y,x-\frac{x+y+z}{3}\|=\|x-y,\frac{2x-y-z}{3}\|=|\frac{1}{3}|^p\|x-y,2x-y-z\|=\|x-y,2x-y-z\|=\|x-y,x-z\|$;

类似可以得到:

$\|y-z,y-u\|=\|y-z,y-x\|=\|x-y,x-z\|$;

$\|z-x,z-u\|=\|z-x,z-y\|=\|x-y,x-z\|$.

然后证明 u 的唯一性, 假设存在另一个点 $v\in X$ 满足

$\|x-y,x-v\|=\|y-z,y-v\|=\|z-x,z-v\|=\|x-y,x-z\|$

因此可得:

$$\|x-y,x-\frac{u+v}{2}\|\leqslant\max\{\|x-y,\frac{x-u}{2}\|,\|x-y,\frac{x-v}{2}\|\}=\max\{\|x-y,x-u\|,\|x-y,x-v\|\}=\|x-y,x-z\| \tag{3}$$

类似可以得到:

$$\|y-z,y-\frac{u+v}{2}\|\leqslant\|x-y,x-z\| \tag{4}$$

$$\|z-x,z-\frac{u+v}{2}\|\leqslant\|x-y,x-z\| \tag{5}$$

另外,

$\|x-y,z-\frac{u+v}{2}\|=\|y-z+z-x,z-\frac{u+v}{2}\|\leqslant\max\{\|y-z,z-\frac{u+v}{2}\|,\|z-x,z-\frac{u+v}{2}\|=\max\{\|y-z,y-\frac{u+v}{2}\|,\|z-x,z-\frac{u+v}{2}\|\}\leqslant\|x-y,x-z\|$.

如果不等式(3)、(4)和(5)是严格的, 则

$\|x-y,x-z\|\leqslant\max\{\|x-y,x-\frac{u+v}{2}\|,\|x-y,z-\frac{u+v}{2}\|\}<\|x-y,x-z\|$,

可推出矛盾. 所以不等式(3)、(4)和(5)中至少有一个等号成立.

有 3 种情况可以考虑. 首先考虑(3)式等号成立的情况,可得

$\|x-y,x-\frac{u+v}{2}\|=\max\{\|x-y,\frac{x-u}{2}\|,\|x-y,\frac{x-v}{2}\|\}$

i. e. $\| x-y, x-\frac{u+v}{2} \|^{\frac{1}{p}} = \max\{ \| x-y, \frac{x-u}{2} \|^{\frac{1}{p}}, \| x-y, \frac{x-y}{2} \|^{\frac{1}{p}}$

以及 $\| x-y, \frac{x-u}{2} \|^{\frac{1}{p}} = \| x-y, \frac{x-v}{2} \|^{\frac{1}{p}}$

根据 X 是 p 严格凸的定义，得到$\frac{x-u}{2}=\frac{x-v}{2}$. 因此 $u=v$.

利用类似的证明方法，(4) 或(5) 成为等式时可以得到相同的结果.

定理 3.6 设 X,Y 是定义在非阿基米德域 K 上的非阿基米德赋(2,p) 范线性空间,其中域 K 满足条件 $|2|=|3|=1$ 且空间 Y 是严格凸的. 令 $f: X\to Y$ 为2-等距映射,若 $g(x)=f(x)-f(0)$,则 $g(\frac{x+y+z}{3})=\frac{g(x)+g(y)+g(z)}{3}$, 对于 X 中所有的满足条件 $\| x-y,x-z \| \neq 0$ 的点 x,y 和 z 都成立.

证明 容易得出 g 也是2-等距并且 $g(0)=0$. 取满足 $\| x-y,x-z \| \neq 0$. 既然 g 是2-等距的，我们就可以得到:

$$\| g(x)-g(y), g(x)-g(\frac{x+y+z}{3}) \| = \| x-y, x-\frac{x+y+z}{3} \| = \| x-y, \frac{2x-y-z}{3} \| = |\frac{1}{3}|^p \| x-y, 2x-y-z \| = \| x-y, 2x-y-z \| = \| x-y, x-z \| = \| g(x)-g(y), g(x)-g(z) \|$$

类似的可以得到

$$\| g(y)-g(z), g(y)-g(\frac{x+y+z}{3}) \| = \| g(x)-g(y), g(x)-g(z) \|;$$

$$\| g(z)-g(x), g(z)-g(\frac{x+y+z}{3}) \| = \| g(x)-g(y), g(x)-g(z) \|.$$

利用引理3.5 可得

$$g(\frac{x+y+z}{3}) = \frac{g(x)+g(y)+g(z)}{3}$$

对所有 $x,y,z\in X$ 成立.

参 考 文 献:

[1] Schneider P. Non-Archimedean Analysis [M]. Berlin: Springer Press, 2005.

[2] Moslehian M S, Sadeghi G. A Mazur-Ulam theorem in non-Archimedean normed spaces [J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69: 3405-3408.

[3] Mazur S, Ulam S. Sur les transformations isométriques d´ espaces vectoriels normés [J]. Comptes Rendus de Academie Science Paris, 1932, 194: 946-948.

[4] Aleksandrov A D. Mappings of families of sets [J]. Soviet Mathematic Dokl, 1970, 11: 116-120.

[5] Ma Yu-mei. The Aleksandrov problem for unit distance preserving mapping [J]. Acta Mathematic Scientia Series B: English Edition, 2000, 20(3): 359-364.

[6] Chu H Y. On the Mazur-Ulam problem in linear 2-normed spaces [J]. Journal Mathematical Analysis and Application, 2007, 327: 1041-1045.

[7] Baker J A. Isometries in normed spaces [J]. Americation Mathematical Monthly, 1971, 78: 655-658.

[8] Choy J, Ku S H. Characterization on 2-isometries in non-Archimedean 2-normed spaces [J]. Journal Chungcheong Mathematical Society, 2009, 22(1): 65-71.