1995 年第 6 期 武 陵 学 刊 自 然 科 学
Nov. 1995 Journal of Wuling Vol. 16 No. 2

非阿基米德概率度量空间中一个多值压缩型映象的不动点定理

刘宇平

（四川大学数学系）

摘　要　本文研究非阿基米德概率度量空间中的一类新型的多值压缩型映象的不动点问题，得到一个新的结果，推广了一些已知的结果。

关键词　多值压缩型映象，非阿基米德概率度量空间，h-型 t-范数，不动点

1　预备知识

我们称(E,F,Δ)为非阿基米德概率度量空间（简记为 $N.A.PM$-空间），如果(E,F,Δ)是 Menger 概率度量空间，且对$\forall\ x,y,z\in E,\forall\ t_1,t_2>0$，$t$-范数 Δ 满足

$$F_{x,z}(\max\{t_1,t_2\})\geqslant\Delta(F_{x,y}(t_1),F_{y,z}(t_2))$$

非空集合 $A\subset(E,F,\Delta)$称为 E 的概率有界子集，如果

$$\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(t)=1$$

我们称 t-范数 Δ 是 h-型的，如果函数簇$\{\Delta^m(t)\}$，$m=1,2,\cdots$，在 $t=1$处是等度连续的，其中 $\Delta^m(t)=\Delta(t,\Delta^{m-1}(t))$，$m=1,2,\cdots,\Delta^0(t)=t$。

正如 Schweizer 和 Sklar（[4]）指出，如果(E,F,Δ)是具有连续 t-范数 Δ 的 Menger 概率度空间，则(E,F,Δ)是由邻域系

$$\{U_y(\varepsilon,\lambda):y\in E,\varepsilon>0,\lambda>0\},$$

其中 $U_y(\varepsilon,\lambda)=\{x\in E:F_{x,y}(\varepsilon)>1-\lambda\}$，所导出的拓扑 J 的 Hausdorff 空间。

下面我们假设(E,F,Δ)为 $N.A.PM$-空间，其中 t-范数 Δ 为连续的。我们用 Ω 表示(E,F,Δ)中的非空 J 闭的概率有界子集簇。

定义　映象 $\widetilde{F}:\Omega\times\Omega\to D$，其中 D 表示一切分布函数的集合，（记 $\widetilde{F}_{(A,B)}$，为 $\widetilde{F}_{A,B}$，$\widetilde{F}_{A,B}$，在点 $t\in R$ 的值为 $\widetilde{F}_{A,B}(t)$.）

$$\widetilde{F}_{A,B}(t)=\sup_{s<t}\Delta(\inf_{a\in A}\sup_{b\in B}F_{a,b}(s),\ \inf_{b\in B}\sup_{a\in A}F_{a,b}(s))$$

其中 $A,B\in\Omega$，$\widetilde{F}$ 称为由 F 诱导的 Menger-Hausdorff 度量。

我们知道$(\Omega,\widetilde{F},\Delta)$也是 Menger 概率度量空间点 $x\in E$ 与集 $A\in\Omega$ 之间的概率距离 $F_{x,A}(t)$如下

$$F_{x,A}(t)=\sup_{s<t}\sup_{y\in A}F_{x,y}(s),t\geqslant0$$

收稿日期：1995－09－10

命题([2.命题10.1.3]) 令 $A\in\Omega$，对任意的 $x,y\in E$，有

1° $F_{x,A}(t)=1,\forall\ t>0$，当且仅当 $x\in A$。

2° $F_{x,A}(t_1+t_2)\geqslant\Delta(F_{x,y}(t_1),F_{y,A}(t_2)),\forall\ t_1,t_2\geqslant0$。

3° $\forall\ A,B\in\Omega,\forall\ x\in A$，有 $F_{x,B}(t)\geqslant\widetilde{F}_{A,B}(t),\forall\ t\geqslant0$。

引理([3.定理1] 令 (E,F,Δ) 为 Menger 概率度量空间，t-范数 Δ 满足 $\lim\limits_{t\to1^-}\Delta(s,t)=s$，对所有的 $s\in[0,1]$。若 $\{p_n\},\{q_n\}\subset E$ 是两个 (E,F,Δ) 中的 J 收敛列，且 $p_n\xrightarrow{J}P\in E,q_n\xrightarrow{J}q\in E$，当 $n\to+\infty$，则

1° $\forall\ t\in R,\lim\limits_{t\to\infty}\inf F_{p_n,q_n}(t)\geqslant F_{p,q}(t)$。

2° 如果 $t\in R$ 是 $F_{p,q}(t)$ 的连续点，则

$$\lim_{n\to\infty}F_{p_n,q_n}(t)=F_{p,q}(t)。$$

2 主要结果

定理 (E,F,Δ)，是 J 完备的 $N.A.PM$-空间，Δ 为连续的 h-型 t-范数，$T:E\to\Omega$ 为多值映象，且满足条件

$$\widetilde{F}_{T_x,T_y}(t)\geqslant F_{x,y}(t/k(\alpha,\beta)),\forall\ t\geqslant0,\forall\ x,y\in E。\tag{1}$$

其中 $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$，满足条件 $F_{x,y}(\alpha)>0,F_{x,y}(\beta)<1$，函数 $K(\cdot,\cdot):(0,+\infty)^2\to(0,1)$，如果对$\forall\ x\in E,\forall\ a\in Tx,\exists\ b\in T_a$，使得

$$F_{a,b}(t)\geqslant\widetilde{F}_{T_x,T_a}(t),\forall\ t\geqslant0$$

则映象 T 在 E 中有不动点。

证 任给 $x_0\in E$，取 $x_1\in T_{x_0}\in\Omega$，由假设得，存在 $x_2\in T_{x_1}$，使得

$$F_{x_1,x_2}(t)\geqslant\widetilde{F}_{Tx_0,Tx_1}(t),\forall\ t\geqslant0$$

类似地，存在 $x_3\in Tx_2$，使得

$$F_{x_2,x_3}(t)\geqslant\widetilde{F}_{Tx_1,Tx_2}(t),\forall\ t\geqslant0.$$

重复这一过程，得一序列 $\{x_n\}\subset E$，满足

$$\begin{cases}x_n\in Tx_{n-1},n=1,2,\cdots\\ F_{x_n,x_{n+1}}(t)\geqslant\widetilde{F}_{Tx_{n-1},Tx_n}(t),\ \forall\ t\geqslant0\end{cases}$$

由压缩条件(1)得

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t)\geqslant\widetilde{F}_{Tx_{n-1},Tx_n}(t)\geqslant Fx_{n-1,x_n}(t/k(\alpha,\beta))$$

其中 $k(\alpha,\beta)<1$，且 $F_{x_{n-1}}-x_n(\alpha)>0,F_{x_{n-1},x_n}(\beta)<1.$

从而函数列 $\{F_{x_n,x_{n+1}}(t)\}$ 单调不减，又因对任意的 $t\in R$、其上界都为1，故我们可以断定

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n,x_{n+1}}(t)=1,\forall\ t>0\tag{2}$$

若不然，如果存在 $t_0\in R,\lim\limits_{n\to\infty}F_{x_n,x_{n+1}}(t_0)=\delta(t_0),\delta(t_0)\in(0,1)$，于是对$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N=N(\varepsilon)>0$，当 $n>N$ 时，

$$F_{x_n,x_{n+1}}(t_0)<\delta(t_0)+\varepsilon$$

我们可取 ε 足够小，使得 $\delta(t_0)+\varepsilon<1$，从而存在 $\beta_0=t_0$，使得 $F_{x_n,x_{n+1}}(\beta)<0$。

又因$\lim\limits_{n\to\infty}F_{x_0,x_1}(t)=1$，从而存在$\alpha_0>0$，使得$F_{x_0,x_1}(\alpha_0)>0$，从而$F_{x_n,x_{n+1}}(\alpha_0)>0$。

由压缩条件(1)可得

$$
\begin{aligned}
F_{x_n,x_{n+1}}(t) &\geqslant \widetilde{F}_{Tx_{n-1},Tx_n}(t) \\
&\geqslant F_{x_{n-1},x_n}(t/k(\alpha_0,\beta_0) \\
&\geqslant \cdots\cdots \\
&\geqslant F_{x_N,x_{N+1}}(t/k^{n-N}(\alpha_0,\beta_0)) \\
&\geqslant \widetilde{F}_{Tx_{N-1},Tx_N}(t/k)^{n-N}(\alpha_0,\beta_0)) \\
&\geqslant F_{x_{N-1},x_N}(t/(k(\alpha_N,\beta_N)\cdot k^{n-N}(\alpha_0,\beta_0))) \\
&\geqslant \cdots\cdots \\
&\geqslant F_{x_0,x_1}(t/(k(\alpha_1,\beta_1),\cdots k(\alpha_N,\beta_N)\cdot k^{n-N}(\alpha_0,\beta_0)))
\end{aligned}
$$

其中$F_{x_{i-1},x_i}(\alpha_i)>0,F_{x_{i-1},x_i}(\beta_i)<1,i=1,2,\cdots,N$。

令$n\to\infty$，得$F_{x_n,x_{n+1}}(t)\to1$，矛盾，从而式(2)成立。

由$N.A.PM$-空间中t-范数Δ的性质，对任意的$n,m\in Z^+$，Z^+表示正整数集，对$\forall\ t>0$，得

$$
\begin{aligned}
F_{x_n,x_{n+m}}(t) &\geqslant \Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(t),F_{x_{n+1},x_{n+m}}(t)) \\
&\geqslant \cdots\cdots \\
&\geqslant \Delta(F_{x_n,x_{n+1}}(t),\Delta(F_{x_{n+1},x_{n+2}}(t),\cdots,\Delta(F_{x_{n+m-1},x_{n+m}}(t))\cdots)
\end{aligned}
$$

由式(2)知，对$\forall\ t>0$，对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N=N(\varepsilon)>0$，当$n>N$时，有 $F_{x_n,x_{n+1}}(t)>1-\varepsilon$

又由于t-范数Δ是h-型的，对$\forall\ \lambda\in(0,1)$，存在$\delta(\lambda)\in(0,1)$，使得对$\forall\ t>\delta(\lambda)$，有

$\Delta^m(t)>1-\lambda,\qquad \forall\ m\in Z^+$

于是，我们可取ε足够小，使得$\delta(\lambda)<1-\varepsilon$，从而由

$$F_{x_n,x_{n+m}}(t)\geqslant\Delta^m(F_{x_n,x_{n+1}}(t))$$

$\geqslant\Delta^m(1-\varepsilon)>1-\lambda,\forall\ t>0,\forall\ m\in Z^+.$

得到$\{x_n\}$为E中的J柯西列，由于(E,F,Δ)的J完备性，得$x_n\xrightarrow{J}x_*\in E$，当$n\to+\infty$。

下证x_*为多值映象T的不动点，由命题得

$$
\begin{aligned}
F_{x_*,Tx_*}(t) &= \sup_{s<t}\sup_{y\in Tx_*}F_{x_*,y}(s),\forall\ t\geqslant0 \\
&\geqslant \sup_{s<t}\sup_{y\in Tx_*}\Delta(F_{x_*,x_{n+1}}(s),F_{x_{n+1},y}(s)) \\
&\geqslant \Delta(F_{x_*,x_{n+1}}(t),F_{x_{n+1},Tx_*}(t)) \\
&\geqslant \Delta(T_{x_*,x_{n+1}}(t),\widetilde{F}_{Tx_n,Tx_*}(t)) \\
&\geqslant \Delta(F_{x_*,x_{n+1}}(t),F_{x_n,x_*}(t/k(\alpha,\beta))) \\
&\geqslant \Delta(F_{x_*,x_{n+1}}(t),F_{x_n,x_*}(t))
\end{aligned}
$$

其中$k(\alpha,\beta)<1$，且$F_{x_n,x_*}(\alpha)>0,F_{x_n,x_*}(\beta)<1.$

令$n\to+\infty$，由$x_n\xrightarrow{J}x_*$，得

$$F_{x_*,Tx_*}(t)=1,\forall\ t>0$$

从而由命题得 $x_*\in Tx_*$，故x_*为多值映象T的不动点。

定理证毕。

由定理易知下述结论成立。

推论　(E,F,Δ)是 J 完备的 $N.A.PM$-空间，Δ 是连续的 h-型 t-范数，$T:E\to\Omega$ 为多值映象，满足条件

$$\tilde{F}_{T_x,T_y}(t)\geqslant F_{x,y}(t/k),\forall\ x,y\in E,\forall\ t\geqslant 0.$$

其中 $k\in(0,m1)$是常数，如果对$\forall\ x\in E,\forall\ a\in Tx,\exists\ b\in T_a$，使得

$$F_{a,b}(t)\geqslant\tilde{F}T_x,T_a(t),\forall\ t\geqslant 0$$

则映象 T 在 E 中有不动点。

参 考 文 献

1　Chang Shsen and Ghen Y. Q., Generalized contraction mapping principle and differential equations in probablistic metric spaces, Proc. Amer. Soc. (to appear)

2　Chang Shisen, Cho Y. J. and Kang S. M., Probablistic metric spaces and Nonlinear Operator theory, Sichun University Publishing House, 1994

3　Chang Shisen, Chen Y. Q., and Guo J. L., Ekland'a Variational principle and Carisli's fixed point theorem in probablistic metric spaces, Acta Math. Appl. Sinica, 7. No 3(1991)217－228

4　Schweizer, B. and Sklar. A., Probablistic Metric spaces, North-Holland, New York, Amsterdam, Oxford, 1983

5　张石生.不动点理论及应用.重庆出版社，1984

A FIXED POINT THEOREM FOR MULTI-VALUED CONTRACTION MAPPING IN NON-ARCHIMEDEAN PROBABILISTIC METRIC SPACES

Liu Yuping

(Department of mathematics, Sichuan University)

Abstract　In this paper, a new fixed point theorem for multi-Valued contraction mapping in non-Archimedean probabilistic metric spaces is given, which includes some know results as special cases.

Keywords　Multi-Valued contraction mapping; non-Archimedean probabilistic metric spaces; t-norm of h-type, fixed point