

阿基米德螺线在线性补偿应用中的原理误差分析

刘 柯 陈秀政 宋金城 梁雅军
(北京航天计量测试技术研究所, 北京 100076)

摘 要 介绍了阿基米德螺线在线性补偿中的应用, 对所存在的理论误差进行了分析, 应用数学方法对误差方程进行了求解, 并通过软件仿真, 给出了螺线上一些常用离散点的误差值, 绘制了误差表。在工程应用中可以通过查阅此表对螺线上各点进行修正, 从而实现精确的线性补偿。

关键词 阿基米德螺线 线性补偿 误差分析

The Theory Error Analysis of Archimedes Spiral Applied in Linearity Compensation

LIU Ke CHEN Xiu-zheng SONG Jin-cheng LIANG Ya-jun
(Beijing Aerospace Institute for Metrology and Measurement Beijing 100076)

Abstract The application of Archimedes spiral in linearity compensation is presented, the theory error is analyzed, and the error equation is demonstrated by mathematic theory. Using computer emulator, the precise errors of some dispersed points in common use are reduced, and error tabulation is provided. In engineering applications, engineers could consult this error tabulation and correct the points on Archimedes spiral to realize accurately linearity compensation.

Key words Archimedes spiral Linearity compensation Error analysis

1 引 言

阿基米德螺线 $\rho = \rho_0 + a\theta$ 又称等速螺线, 在二维极坐标系中螺线上每点的极径与极角成线性关系。工程中, 这一特性可以用来进行线性补偿, 在机械制造、计量仪器设计中有着广泛的应用。比如力矩的线性补偿, 通常做法就是以物体的重力为作用力, 极径 ρ 在水平方向的分量作为力臂; 当阿基米德螺线整体绕极点匀速转动时, 认为螺线结构产生线性的力矩。由于在铅垂方向上切线的切点极角

是变化的, 导致线性变化的极径在水平方向分量不再与极角成线性, 而是存在一个微小的误差, 这就影响了线性补偿的效果。通过对这个误差进行合理的分析补偿, 可以实现预期的工程目的。

2 阿基米德螺线在线性补偿应用中的原理误差来源

二维的阿基米德螺线可以这样描述, 当一动点在极坐标系中沿着极径作匀速直线运动, 而极径同

时以恒定角速度旋转运动时,这个动点的轨迹就是阿基米德螺线 (spiral of Archimedes)。取初始点 A 在极轴 $\theta = 0$ 上, A 点到极点的距离为 ρ_0 。从 A 点出发到曲线上任意一点 $P(\rho, \theta)$, 则 P 点的极坐标方程为^[1]

$$\rho = a\theta + \rho_0 \quad (1)$$

a 为阿基米德螺线常数。阿基米德螺线的一般方程还可以表示成以下形式

$$\rho = a(\theta + \theta_0) \quad (2)$$

与公式 (1) 中对应, $\rho_0 = a\theta_0$, θ_0 是螺线的初始转角, 以上两个方程所描述的运动轨迹是相同的。

下面就浮力的线性补偿应用进行具体分析。系统的工作原理如图 1 所示, 阿基米德螺线的起始点与外圆圆心 O 重合, O 点也是整个结构的旋转轴心。钟罩 m_1 , 配重物 m_3 的重力作用线都绕在半径为 R 的大轮上, 配重物 m_2 重力作用线绕在阿基米德螺线结构上。对于本系统来说, 阿基米德螺线的形状特征是完全确定的, 也就是 $0 \sim 360^\circ$ 的一段螺线结构。当整个结构以一定的角速度 ω 绕极点 (轴心 O) 旋转时, 阿基米德螺线结构上的各点都在绕极点旋转, 因此螺线旋转到不同方位, 相当于初始转角 θ_0 在不断变化。

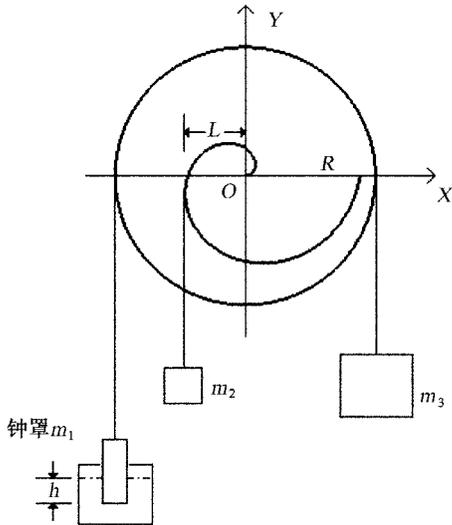


图 1 基于阿基米德螺线的浮力线性补偿示意图

如果系统要达到平衡状态, 则图 1 中左右两边的力矩应该保持平衡。所以有

$$m_2 g \times L(\theta_0) + (m_1 g - f_{浮}) \times R = m_3 g \times R \quad (3)$$

体 m_2 所受重力; $m_3 g$ ——配重物 m_3 所受重力; $f_{浮}$ ——钟罩所受的浮力。

推导出

$$f_{浮} = Q_0 v = Q_0 S h = Q_0 S R \theta_0 \quad (4)$$

式中: S ——钟罩底面积; h ——螺线转动 θ_0 角度时, 钟罩下沉的高度 (实际结构保证了在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内转动时, 下沉量不会超过钟罩的高度)。

$L(\theta_0)$ 表示配重物 m_2 重力作用在螺线结构上的力臂长度, 为

$$L(\theta_0) = \frac{R(m_2 - m_0)}{m_1} - \frac{Q_0 S R^2}{m_1} \theta_0 \quad (5)$$

与阿基米德螺线的一般方程相比较, 也可以将式 (5) 表示为 $L(\theta_0) = a(\theta_0 + \theta)$ 的形式。式 (5) 也表明, 如果系统要达到平衡状态, 力臂必须是线性的; 这也是阿基米德螺线能够实现线性补偿的必要条件。

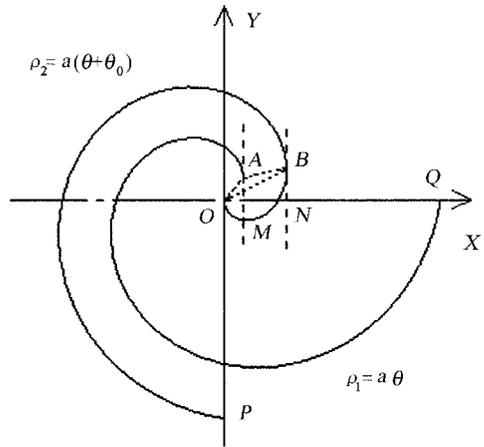


图 2 螺线 ρ_1 顺时针方向旋转 90° 到达 ρ_2 位置图

下面对阿基米德螺线结构所产生的力臂进行分析。

螺线转动过程及重力切线方向如图 2 所示。为了便于分析, 建立直角坐标系时, Y 轴正向取重力方向, 也就是对应图 1 中垂直向下的方向。图 2 中点 A 为重力作用线与螺线切点, 在整个结构转动过程中, 重力作用线的方向是不变的 (沿 Y 轴正向), 始终与 X 轴垂直。通过作图可知, 螺线顺时针方向旋转时, 切线向 X 轴正向平移, 点 A, Q 分别是螺线旋转 $0^\circ, 360^\circ$ 时所对应的切点, 图 2 中虚线表示的 ABQ 也就是切点的运动轨迹。

为了便于分析, 将螺线一般方程表示成 $\rho =$

$a(\theta_0 + \theta)$ 形式。

当螺线结构顺时针方向旋转一个角度 θ_0 , 由 ρ_1 位置运动到 ρ_2 时, 切点由 A 点移动到 B 点, 切线与 X 轴分别交与 M, N 。设 A, B 两点对应的极角分别为 θ_1, θ_2 即 $\angle AOM = \theta_1, \angle BON = \theta_2$, 则切点处极径可表示为

$$\begin{aligned} \rho_1 &= OA = a\theta_1, \\ \rho_2 &= OB = a(\theta_2 + \theta_0); \end{aligned}$$

由于 $\theta_1 \neq \theta_2$, 所以有: $\rho_2 - \rho_1 = a[\theta_0 + (\theta_2 - \theta_1)] \neq a\theta_0$ 。

由此可以得出结论: 极径与螺线结构的转角并不呈线性关系。

对于我们所关心的力臂, 也有

$$ON - OM = a[(\theta_0 + \theta_2) \cos\theta_2 - \theta_1 \cos\theta_1] \quad (6)$$

即: $ON - OM = a[(\theta_2 \cos\theta_2 - \theta_1 \cos\theta_1) + \theta_0 \cos\theta_2]$

可见, 力臂与螺线结构的转角也不是线性关系, 而是转角 θ_0 的一个函数, 随着螺线转角不断变化。

通过作图可知, 当 θ_0 在 $(0^\circ, 360^\circ)$ 范围内连续变化时, 切点对应极径 $\rho_2 = a(\theta_2 + \theta_0)$ 是连续的, 力臂 $ON = a(\theta_2 + \theta_0) \cos\theta_2$ 也是连续的。力臂是螺线结构所转过角度 θ_0 的函数; 而且转角 θ_0 确定以后, 重力作用线会在一个唯一确定的 θ_2 (切点只会落在 ABQ 上, 所以 θ_2 在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内) 处与螺线相切, 这个切点的极角 θ_2 也是关于 θ_0 的一个函数。推导出切点极角 θ_2 与转角 θ_0 之间的函数关系, 就可以确定力臂与转角的对应函数关系。

推导出力臂的变化轨迹后, 可以计算出力臂长度与线性力臂之间的差值, 在使用数控机床对螺线结构进行加工时, 利用该差值对螺线结构进行修正, 就可以使螺线产生线性的力臂, 从而实现线性补偿的工程目的。

3 阿基米德螺线上切点极角和力臂长度的数学求解

螺线的一般方程为 $\rho = a(\theta + \theta_0)$, 设重力作用线在 A 点与螺线相切, 力臂的长度相当于对应直角坐标系中 A 点的横坐标, 即 $x = \rho \cos\theta$ 直线 $x = \rho \cos\theta$ 也就是直角坐标系中 A 点的切线, 螺线的横坐标在 A 点是一个极大值 因此有

$$x = a(\theta + \theta_0) \cos\theta$$

$$x' = \frac{\partial x}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = a \cos\theta - a(\theta + \theta_0) \sin\theta = 0 \quad (7)$$

螺线结构旋转到一个任意角度 θ_0 时, 螺线上重力作用线切点是唯一确定的, 式 (7) 就是切点极角与 θ_0 之间对应的函数方程。而且, 通过作图也可以看出, 在螺线转动过程中, 只有 A 点到 Q 点的曲线弧, 也就是 ABQ 段会与重力作用线发生相切, OA 段不会发生相切。当转动到极限, $\theta_0 = 2\pi$ 时, 力臂 L 最长, $L = OQ$ 。

考虑到实际作用的情况, θ_0 在 $[0, 2\pi]$ 范围内变化, 直角坐标系中切点只会落在第一象限, 也就是 θ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 范围内。所以以上方程也可写成以下形式

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\theta + \theta_0} \quad (8)$$

上式 (8) 不能按照一般的三角函数方程进行求解, 可以把方程中的三角函数按照泰勒级数展开, 将三角函数方程转换为高次方程来进行近似求解。在

$|\theta| < \frac{\pi}{2}$ 范围内, 有

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \Delta_1(\theta)$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \Delta_2(\theta)$$

式中: $\Delta_1(\theta)$ ——关于 θ 的七阶以上高次项; $\Delta_2(\theta)$ —— θ 的六阶以上高次项。

所以, 方程 (8) 转换为

$$\frac{\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \Delta_1(\theta)}{1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \Delta_2(\theta)} = \frac{1}{\theta + \theta_0} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{即 } (\theta + \theta_0) \left[\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \Delta_1(\theta) \right] &= 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 \\ &+ \frac{1}{4!}\theta^4 + \Delta_2(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{整理后得到 } -1 + \theta_0\theta + \frac{3}{2!}\theta^2 - \frac{\theta_0}{3!}\theta^3 - \left[\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right] \theta^4 \\ + \left[\frac{\theta_0}{5!}\theta^5 + \frac{1}{5!}\theta^6 + \Delta_1'(\theta) - \Delta_2(\theta) \right] &= 0 \end{aligned}$$

其中 $\Delta_1'(\theta) = \theta^* \Delta_1(\theta)$, 是 θ 的八阶以上高次项。

为了得到 θ 关于 θ_0 的函数表达式, 将 θ_0 看作一个已知的常量进行求解。由于 5 阶以上的一元高次方程是没有封闭解的, 为得到确切的函数表达式, 这里将方程简化, 舍去五次以上高次项, 于是得到

$$-1 + \theta_0\theta + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{\theta_0}{3}\theta^3 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\theta^4 = 0 \quad (10)$$

$$\text{即} \quad 5\theta^4 + 4\theta_0\theta^3 - 36\theta^2 - 24\theta_0\theta + 24 = 0$$

通过换元求解, 并由 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 作为约束条件进行判断, 得到所求的方程的正解为

$$\theta = t_1^{\frac{1}{3}} + t_2^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{\theta_0} \quad (11)$$

式中:

$$t_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{54}{\theta_0^3} + \frac{12}{\theta_0} \right) + \sqrt{\left(\frac{54}{\theta_0^3} + \frac{12}{\theta_0} \right)^2 - 4 \left(\frac{9}{\theta_0^2} + 2 \right)} \right]^{\frac{1}{3}};$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{54}{\theta_0^3} + \frac{12}{\theta_0} \right) - \sqrt{\left(\frac{54}{\theta_0^3} + \frac{12}{\theta_0} \right)^2 - 4 \left(\frac{9}{\theta_0^2} + 2 \right)} \right]^{\frac{1}{3}}.$$

式 (11) 就是螺线转动到 θ_0 位置时, 切点的极角表达式, 此时力臂长度就是切点在 X 轴上的分量

$$\rho = a(\theta + \theta_0) = a \left(t_1^{\frac{1}{3}} + t_2^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{\theta_0} + \theta_0 \right) \quad (12)$$

$$L = \rho \cos \theta = a \left(t_1^{\frac{1}{3}} + t_2^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{\theta_0} + \theta_0 \right) \cos \left(t_1^{\frac{1}{3}} + t_2^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{\theta_0} \right) \quad (13)$$

式 (13) 即阿基米德螺线结构作旋转运动时, 力臂 L 关于旋转角 θ_0 的函数表达式。由于求解高次方程时舍去了高次项, 该式也只是一个近似解。

4 螺线上切点极角离散值的精确求解

通过前面的分析, 将阿基米德螺线上力臂推导转化成了一个数学公式的求解, 也就是方程 (7)

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\theta + \theta_0}$$

该方程描述了切点极角 θ 的轨迹。

由于螺线结构确定, 在旋转角 (也可看作坐标系中螺线的初始转角) θ_0 一定时, 切点位置是唯一确定的。方程 (7) 也可以表示成以下形式

$$\theta_0 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \theta \quad (14)$$

由于使用数控机床加工时, 一般都使用曲线上的离散点计算步进值, 这里不再对方程 (7) 进行表达式求解, 而是对方程上的常用离散点进行计算。由前面的分析可知, $0 < \theta_0 < 360^\circ$ 时, 切点落在第一象限, 也就是 $0 < \theta < 90^\circ$, 而且 θ_0 与 θ 是一一对应的。因此可以采用迭代和逐次逼近的方法, 对 θ 进行赋值, 得到一系列均匀的离散解。

在 Matlab 下进行仿真, 可以得到表 1 中所列各项数据。程序基本思想是令 $\theta_i = \frac{\pi}{2} \times \frac{i}{N}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N-1$), 基数 N 越大, 则所取到的点越多, 就可以在更小的区间内逼近工程所需的某一个 θ_0 点。表 1 中是取 $N = 100\,000\,000$ 时计算得到的部分数据。计算公式

$$\theta_0 = \cos \left(\frac{\pi}{2} \times \frac{i}{100\,000\,000} \right) / \sin \left(\frac{\pi}{2} \times \frac{i}{100\,000\,000} \right) - \frac{\pi}{2} \times \frac{i}{100\,000\,000}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, 100\,000\,000 - 1 \quad (15)$$

通过计算式 (14) 可以得到与 $0 < \theta < 90^\circ$ 对应的 $100\,000\,000$ 个 θ_0 值 (由前面分析可知, 工程实际应用中 θ 只会落在 $0 \sim 90^\circ$ 范围内), 受篇幅所限, 表 1 中只给出了间隔为 30° 的离散点, 如第二列 θ_0 所示, 给出了对 θ_0 在 30° 整数倍附近的一个逼近值。通过仿真也可以很方便的计算出该点对应的切点极径 ρ , 力臂长度 L 。

表 1 阿基米德螺线上切点极角与力臂离散值 ($N = 10^8$)

i	$\theta_0 (^\circ)$	$\theta (^\circ)$	$\rho = a(\theta_0 + \theta) \quad (\text{m})$	$L = \rho \cos \theta \quad (\text{m})$
54 770 540	0 000 001	49.293 486	0.860 334	0.561 096
43 890 600	30 000 001	39.501 540	1.213 031	0.935 984
35 480 738	60 000 001	31.932 664	1.604 528	1.361 715

续表 1

i	$\theta_0 (^\circ)$	$\theta (^\circ)$	$\rho = a(\theta_0 + \theta) \quad (\text{m})$	$L = \rho \cos \theta \quad (\text{m})$
29 154 738	90.000 00	26.239 264	2 028 758	1.819 706
24 418 766	119.999 998	21.976 889	2 477 964	2 297 903
20 837 282	150.000 006	18.753 554	2 945 305	2 788 940
18 081 646	180.000 012	16.273 481	3 425 619	3 288 372
15 919 632	210.000 002	14.327 669	3 915 256	3 793 478
14 190 492	240.000 005	12.771 443	4 411 694	4 302 547
12 782 782	269.999 993	11.504 504	4 913 180	4 814 470
11 618 304	300.000 000	10.456 474	5 418 488	5 328 503
10 641 260	329.999 981	9.577 134	5 926 739	5 844 135

注: θ_0 ——螺线结构的转角; θ ——切点极角; L ——力臂长度; ρ ——切点极径; L ——力臂长度, 计算时取典型值 $a = 1\text{m}$

以上表 1 中的数据都通过反向代入进行了验证。将第二列 θ_0 与第五列力臂长度 $L(\theta_0)$ 数据绘成图表, 可以直观的看出阿基米德螺线上力臂与螺线转角间的关系, 如图 3 中蓝色曲线所示。从曲线上可以看出随着 θ_0 的增大, 曲线的斜率也不断增大, 这也与阿基米德螺线浮力线性补偿实验中, m_1 运动有一个微小加速度的现象吻合。

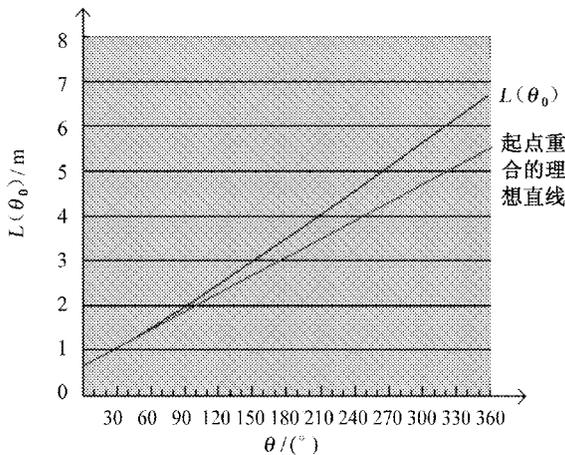


图 3 力臂与螺线转角的函数曲线图

5 结束语

本文详细分析了阿基米德螺线在线性补偿应用中的原理误差。着重论证了螺线转角 θ_0 对重力作用线切点位置, 以及力臂的影响; 并分别用高次方程和迭代法对误差方程进行了求解, 推导出了切点极角关于转角 θ_0 的函数关系, 并给出了螺线上离散点的力臂、转角值。通过查阅这些离散点数据, 可以在使用数控机床加工螺线的过程中, 对螺线结构参数进行修正^[2], 以实现线性补偿的目的, 对于工程应用具有参考作用。

参考文献

- [1] 余俊. 机械设计 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1986
- [2] 曹凤. 数控系统渐开线插补功能的研究与实现. 模具工业, 2003(1).